作 者 简 介



王明新，1957年3月生，河南宁陵人。1987年9月至1990年6月师从叶其孝教授攻读博士研究生。1990年8月至1994年8月，分别在中国科学院数学与系统科学研究院系统科学研究所和应用数学研究所做博士后研究工作(协作导师：丁夏畦院士)。1994年8月调入东南大学。现为东南大学教授，博士生导师。

长期从事偏微分方程理论与应用的研究和数学教学工作。主要研究领域为非线性偏微分方程和生物数学，研究方向涉及非线性抛物型方程和方程组、非线性椭圆型方程组和非线性双曲型方程组。在国内外专业杂志发表论文130余篇，著有《非线性抛物型方程》、《数学物理方程》。

多次访问美国 Minnesota 大学、香港科技大学和澳大利亚 Armedale 大学，与新加坡国立大学保持长期的合作关系。1992年获教育部科技进步三等奖(第三获奖人)及河南省青年科技奖，1997年获江苏省首届青年科学家奖提名奖，1998年获江苏省科技进步二等奖(第一获奖人)，1999年获教育部科技进步三等奖(第一获奖人)，1999年获华英文化教育基金奖。现为江苏省“333”第二层次培养人选和江苏省跨世纪学术带头人。

大学数学科学丛书　13

算子半群与发展方程

王明新　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书系统地介绍了线性算子半群的基本理论及其在发展方程中的应用. 全书共分为八章：前两章是预备知识；第三章介绍 C_0 半群和解析半群的基本理论；第四章介绍半线性发展方程的抽象结论；第五章和第六章分别介绍半线性抛物型方程和波动方程；第七章介绍分数幂算子、分数幂空间和拟线性抛物型方程；第八章介绍 Schrödinger 方程. 本书的特点是强调应用和实例. 书中内容深入浅出，文字通俗易懂，并配有适量难易兼顾的习题.

本书可作为偏微分方程、动力系统、泛函分析、计算数学、控制论方向与理工科相关方向研究生的教材和教学参考书，亦可作为数学、工程等领域的青年教师和科研人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

算子半群与发展方程/王明新编著. —北京：科学出版社，2006
(大学数学科学丛书，13)
ISBN 7-03-017755-X

I. 算… II. 王… III. 线性算子半群-应用-发展方程 IV. ①O152.7 ②O175.26

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 087804 号

责任编辑：赵彦超 吕 虹/责任校对：赵桂芬
责任印制：安春生/封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

天时彩色印刷有限公司 印刷
科学出版社编务公司排版制作
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006 年 8 月第 一 版 开本：B5（720 × 1000）
2006 年 8 月第一次印刷 印张：12 3/4
印数：1—2 500 字数：232 000

定价：36.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉）

《大学数学科学丛书》序

按照恩格斯的说法，数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学. 从恩格斯那时到现在，尽管数学的内涵已经大大拓展了，人们对现实世界中的数量关系和空间形式的认识和理解已今非昔比，数学科学已构成包括纯粹数学及应用数学内含的众多分支学科和许多新兴交叉学科的庞大的科学体系，但恩格斯的这一说法仍然是对数学的一个中肯而又相对来说易于为公众了解和接受的概括，科学地反映了数学这一学科的内涵. 正由于忽略了物质的具体型态和属性、纯粹从数量关系和空间形式的角度来研究现实世界，数学表现出高度抽象性和应用广泛性的特点，具有特殊的公共基础地位，其重要性得到普遍的认同.

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的. 作为一种先进的文化，数学不仅在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，而且是人类文明的一个重要的支柱. 数学教育对于启迪心智、增进素质、提高全人类文明程度的必要性和重要性已得到空前普遍的重视. 数学教育本质是一种素质教育；学习数学，不仅要学到许多重要的数学概念、方法和结论，更要着重领会到数学的精神实质和思想方法. 在大学学习高等数学的阶段，更应该自觉地去意识并努力体现这一点.

作为面向大学本科生和研究生以及有关教师的教材，教学参考书或课外读物的系列，本丛书将努力贯彻加强基础、面向前沿、突出思想、关注应用和方便阅读的原则，力求为各专业的大学本科生或研究生(包括硕士生及博士生)走近数学科学、理解数学科学以及应用数学科学提供必要的指引和有力的帮助，并欢迎其中相当一些能被广大学校选用为教材，相信并希望在各方面的支持及帮助下，本丛书将会愈出愈好.

李大潜

2003 年 12 月 27 日

前　言

作为一本研究生教材或教学参考书，本书自成体系. 书中介绍了有界线性算子半群的基本理论及其在发展方程中的应用，同时还介绍了几种处理半线性抛物型方程、半线性波动方程以及半线性 Schrödinger 方程的初边值问题和初值问题解的整体存在性，以及解在有限时刻爆破的方法.

随着近年来研究生的扩招，教材建设已成为各高校研究生培养工作中亟待解决的一项头等大事. 算子半群和非线性发展方程，作为偏微分方程、动力系统、泛函分析、计算数学等相关方向研究生的基础课程，编写一本合适的教材是有意义的. 近十年来，作者每年都为研究生讲授“算子半群与发展方程”课程. 本书就是在该课程讲义的基础上，经多年逐步补充、修改完善而成.

含有未知函数关于时间变量 t 的导数 (偏导数) 的微分方程称为 **发展方程** ，其中常微分方程是它的特例. 因此，发展方程是一个范围广泛、内容丰富的领域. 研究发展方程的基本理论 —— 解的存在性、唯一性和连续依赖性的常用方法有两种：一是算子半群方法，二是先验估计结合不动点定理. 这两种方法都强烈地依赖于微分算子的性质 (也可以说是椭圆型方程解的先验估计) . 本书采用第一种方法来研究发展方程.

常微分方程初值问题解的存在性、唯一性和连续依赖性，是本科生“常微分方程”课程的基本内容，学生在本科阶段就已经了解并熟练掌握了处理的方法和思想. 把一个发展型偏微分方程写成一个抽象的常微分方程，从而可以借助于常微分方程的处理方法来研究非线性发展型偏微分方程解的存在性、唯一性和连续依赖性，这是一个十分自然的思路. 由于此时解的值域不再是 $\mathbb{R}^N$, 而是一个 Banach 空间，因此作为预备知识，本书的第一章介绍了抽象函数的基本性质和结果. 这一章也是定义和理解发展方程弱解的基础，如果学时不够，本章可以略讲. 在这种情况下，建议用一个课时的时间介绍一些基本思想，并举几个例子，比如，解释空间 $L^p([0,T],L^q(\Omega))$ 以及 $u\in C^1([0,T],H_0^1(\Omega))$ 等的含义，以便于学生自学.

把一个发展型偏微分方程改写成一个抽象的常微分方程 $u'(t)+Au(t)=F(t,u(t))$, 该常微分方程中含有一个微分算子 A. 然而，并不是对所有的微分算子 A, 该问题都可以求解. 本书的第二章介绍一类重要的线性算子 —— 增生算子，并阐述了线性算子的谱和共轭算子的一些结果，同时还给出了偏微分方程理论中的一些实例.

第二章的内容是对泛函分析课程的补充.

在前两章的基础上, 第三章引入 C_0 半群和解析半群, 论述它们的基本性质以及线性方程解的存在性和唯一性. 第四章讨论半线性发展方程的抽象结论, 研究解的存在性、唯一性、连续依赖性、解的延拓 (极大定义解) 以及二择一性质. 利用第四章中的抽象结果, 在第五章和第六章中, 我们分别讨论了半线性抛物型方程和半线性波动方程, 并介绍了几种处理半线性抛物型方程和波动方程的初边值问题解的整体存在以及解在有限时刻爆破的方法. 在半线性抛物型方程的研究中, 最大值原理发挥着重要作用. 这是因为在最大值原理成立时, 我们可以不再用 L^2 方法, 而是直接用 C_0 方法来讨论解的性质, 这样的处理方法运用起来非常简单、便捷. 在研究半线性波动方程时, 我们首先在空间 $H^1 \times L^2$ 中引入等距群的概念, 并在此空间中给出局部解的存在性. 一般来说, 这种局部解仅在较大的空间 $L^2 \times H^{-1}$ 中关于 t 是可微的. 为了得到解在空间 $H^1 \times L^2$ 中关于 t 的可微性质, 就需要对初值附加更高的光滑性条件.

第七章介绍分数幂算子和分数幂空间及其对于拟线性抛物型方程的应用. 这一章涉及的拟线性抛物型方程的最简单形式是 $u_t - \Delta u = f(u, \nabla u)$. 处理方法是通过研究分数幂空间与适当的 Sobolev 空间之间的嵌入关系, 用主项 (Δu) 来控制非线性项中的 ∇u, 进而得到所要的结果. 把本章的结论应用于具体问题时, 寻找合适的 "工作空间" 和 "分数幂空间" 是成功与否的关键.

本书的最后一章, 即第八章, 介绍了 Schrödinger 方程的的一些基本结论, 以及非线性 Schrödinger 方程的初值问题 —— 解的局部存在性、整体存在性和有限时刻爆破.

把抽象结果运用于具体的发展方程时, 选取合适的 "工作空间" (基本 Banach 空间) 至关重要. 然而, 为了选取合适的 "工作空间", 必须熟悉 Sobolev 嵌入定理以及椭圆型方程的先验估计的相关结论. 通过本课程的学习, 读者可以很好地理解这一点.

本书的部分内容参考了国内外出版的一些教材, 请参阅所附的参考文献. 本书的讲义, 作者在东南大学和徐州师范大学为研究生讲授过多次, 并被列为东南大学研究生优秀课程. 本书的出版得到了东南大学科技出版基金和国家自然科学基金 (No.19831060,10471022) 的资助. 在编写讲义和成书的过程中, 东南大学的师生, 特别是历届偏微分方程专业的研究生, 都提出了许多宝贵的意见, 在此一并致谢. 由于作者学识所限, 错误和不足之处在所难免, 还望读者予以批评指正.

作　者

2006 年 3 月

符 号 表

符号	含义
$\mathbb{R}^N$	N- 维实欧氏空间， $\mathbb{R}=\mathbb{R}^1$
$\mathbb{C}$	复空间
$\mathbb{K}$	数域 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$
$\mathcal{R}(A)$	算子 A 的值域
$\mathcal{N}(A)$	算子 A 的核 (零子空间)
$\mathbb{N}$	表示集合 $\{1,2,\cdots\}$
$\hookrightarrow$	嵌入
$\approx$	等价
$\mathbb{N}^N$	表示集合 $\{\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_N)\colon \alpha_i\in\mathbb{N}\}$, 这里的 α 称为多重指标
$\mathcal{L}(X,Y)$	从 X 到 Y 的连续线性算子空间, 通常记 $\mathcal{L}(X)=\mathcal{L}(X,X)$
X^*	向量空间 X 的拓扑共扼空间
$D(A)$	带有范数 $\Vert u\Vert_{D(A)}=\Vert u\Vert+\Vert Au\Vert$ 的 Banach 空间 $(D(A),\Vert\cdot\Vert_{D(A)})$, 其中 A 是一个具有闭图象的线性算子
$\mathcal{D}(\Omega)$	在 Ω 内具有紧支集的实值或复值 C^∞ 函数空间
$C_0^\infty(\Omega)$	表示函数空间 $C_c^\infty(\Omega)=\mathcal{D}(\Omega)$
$C_c(\Omega)$	在 Ω 内具有紧支集的连续函数空间
$C_0(\Omega)$	空间 $C(\bar{\Omega})$ 中在边界 $\partial\Omega$ 上取值为零的函数空间
$\mathcal{S}$	表示函数空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)=\{u\in C^\infty(\mathbb{R}^N)\colon \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^N}\lvert x^\beta D^\alpha u\rvert<\infty$ 对所有多重指标 α,β 成立 $\}$, 通常称 $\mathcal{S}$ 为速降函数空间
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Ω 上的分布函数空间
$L^p(\Omega)$	在 Ω 上可测并且 $\lvert u\rvert^p$ 可积的函数空间 $(1\leqslant p<\infty)$
$\Vert u\Vert_p$	表示范数 $\left(\int_\Omega \lvert u\rvert^p dx\right)^{1/p}$, $u\in L^p(\Omega)$
$L^\infty(\Omega)$	在 Ω 上可测且几乎处处有界的函数空间, $\Vert u\Vert_\infty=\inf\{C>0\colon \lvert u(x)\rvert\leqslant C$ 几乎处处成立 $\}$
p'	p 的共扼指数, 即 $p'=p/(p-1)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$

D^α	表示导数 $\dfrac{\partial^{\lvert\alpha\rvert}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_N}^{\alpha_N}}$, $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_N)$, $\lvert\alpha\rvert=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i$
$W^{m,p}(\Omega)$	表示函数空间 $\{f\in L^p(\Omega), D^\alpha f\in L^p(\Omega), \lvert\alpha\rvert\leqslant m\}$, $\lVert u\rVert_{W^{m,p}}=\sum_{\lvert\alpha\rvert\leqslant m}\lVert D^\alpha u\rVert_p$, $H^m(\Omega)=W^{m,2}(\Omega)$
$W_0^{m,p}(\Omega)$	空间 $\mathcal{D}(\Omega)$ 在范数 $\lVert\cdot\rVert_{W^{m,p}}$ 下的闭子空间, $H_0^m(\Omega)=W_0^{m,2}(\Omega)$
$\mathcal{D}(I,X)$	从 I 到 X 的具有紧支集的 C^∞ 函数空间
$\mathcal{D}'(I,X)$	表示集合 $\mathcal{L}(\mathcal{D}(I,X),X)$, 取值于 X 且定义于 I 的分布函数空间, 当 $u\in\mathcal{D}'(I,X)$ 时, 用 $u'=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ 表示 u 的广义导数
$C_c(I,X)$	从 I 到 X 的具有紧支集的连续函数空间
$C_b(I,X)$	从 I 到 X 的连续有界函数空间
$C_{b,u}(I,X)$	从 I 到 X 的一致连续且有界的函数空间
$L^p(I,X)$	从 I 到 X 的可测函数空间, 并且 $\lVert u\rVert_X^p$ 在 I 上可积, $1\leqslant p<\infty$. 当 $u\in L^p(I,X)$ 时, 简记 $\lVert u\rVert_p=\lVert u\rVert_{L^p(I,X)}=\left(\int_I\lVert u\rVert_X^p\right)^{1/p}$
$L^\infty(I,X)$	从 I 到 X 可测且几乎处处有界的函数空间. 当 $u\in L^\infty(I,X)$ 时, 简记 $\lVert u\rVert_\infty=\lVert u\rVert_{L^\infty(I,X)}=\inf\{C>0: \lVert u(t)\rVert_X\leqslant C$ 几乎处处成立 $\}$
$W^{1,p}(I,X)$	表示集合 $\{u\in L^p(I,X):$ 在广义导数的意义下, $u'\in L^p(I,X)\}$, $\lVert u\rVert_{W^{1,p}(I,X)}=\lVert u\rVert_{L^p(I,X)}+\lVert u'\rVert_{L^p(I,X)}$

目 录

第一章　预备知识

常微分方程初值问题解的存在性、唯一性和连续依赖性，是本科生“常微分方程”课程的基本内容．学生在本科阶段就已经了解并熟练掌握了处理“解的存在性、唯一性和连续依赖性”的方法和思想．把一个发展型偏微分方程写成一个抽象的常微分方程，并利用常微分方程的处理方法来研究非线性发展型偏微分方程解的存在性、唯一性和连续依赖性，是一个十分自然的思路．由于此时解的值域不再是 $\mathbb{R}^N$, 而是一个 Banach 空间，因此作为预备知识，介绍抽象函数的基本性质和结果是必要的．这一章也是定义和理解发展方程的弱解的基础．

本章总假设 X 和 Y 均为 Banach 空间．

§1.1　Sobolev 空间

在本节里，我们不加证明地叙述本书经常用到的 Sobolev 空间中的几个重要结果．

设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的开子集． $W^{m,p}(\Omega)$, $W_0^{m,p}(\Omega)$ 表示通常的 Banach 空间．当 $p=2$ 时，记 $W^{m,2}(\Omega)=H^m(\Omega)$, $W_0^{m,2}(\Omega)=H_0^m(\Omega)$.

定理 1.1.1 (Poincaré 不等式)　若 Ω 有界，则有

$$\|u\|_2 \leqslant \lambda^{-1/2}\|\nabla u\|_2, \qquad \forall\, u \in H_0^1(\Omega),$$

其中 λ 是 $-\Delta$ 在 Ω 上带有齐次 Dirichlet 边界条件的第一特征值．

定理 1.1.2　若 Ω 是的边界 Lipschitz 连续，则有

(1) 如果 $1 \leqslant p < N$, 那么 $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ 对所有 $q \in [p, p^*]$ 成立，其中 $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$;

(2) 如果 $p = N$, 那么 $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ 对所有 $q \in [p, \infty)$ 成立；

(3) 如果 $p > N$, 那么 $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\Omega)$, 其中 $\alpha = 1 - \dfrac{N}{p}$.

定理 1.1.3　如果在定理 1.1.2 的条件下，进一步假设 Ω 是有界的，那么在定理 1.1.2 中，结论 (2) 和 (3) 中的嵌入都是紧的．如果又有 $q \in [p, p^*)$, 那么结论 (1) 中的嵌入也是紧的．

注 1.1.1　当用 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 替代 $W^{1,p}(\Omega)$ 时，即使没有关于 Ω 的光滑性假设，定理 1.1.2 和定理 1.1.3 中的结论仍然成立．

上述结论的证明可参见文献 [1]. 下面的内插不等式的证明可参见文献 [7](定理 9.3, p.24).

定理 1.1.4 (内插不等式)　假设 $1 \leqslant q, r \leqslant \infty$, j, m 是整数且满足 $0 \leqslant j < m$. 假定 $j/m \leqslant \theta \leqslant 1$ (当 $m - j - N/r$ 是非负整数时, 要求 $\theta < 1$), p 满足

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{N} + \theta\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{N}\right) + (1-\theta)\frac{1}{q}.$$

那么存在常数 $C(q, r, j, m, \theta, N)$, 使得

$$\sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha u\|_p \leqslant C\left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_r\right)^\theta \|u\|_q^{1-\theta}, \qquad \forall\, u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

命题 1.1.5 (复合法则 [11])　设 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 Lipschitz 连续函数, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. 那么对所有 $u \in W^{1,p}(\Omega)$, 函数 $F(u) \in W^{1,p}(\Omega)$. 此外, 若记 $\mathcal{N}$ 是 F 的不可微点的集合 ($|\mathcal{N}| = 0$) , 则在 Ω 内, 几乎处处成立

$$\nabla F(u) = \begin{cases} F'(u)\nabla u, & \text{如果 } u \notin \mathcal{N}, \\ 0, & \text{如果 } u \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

推论 1.1.6　设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$. 则对任意 $u \in W^{1,p}(\Omega)$, 有 $u^+, u^-, |u| \in W^{1,p}(\Omega)$, 并且在 Ω 内几乎处处成立

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u, & \text{如果 } u > 0, \\ 0, & \text{如果 } u \leqslant 0. \end{cases}$$

§1.2　抽 象 函 数

本节陈述后面将要用到的有关于抽象函数的积分和抽象广义函数的若干结果. 给定一个 Banach 空间 X 和一个开区间 $I \subset \mathbb{R}$.

1.2.1　可测函数

定义 1.2.1　称函数 $f : I \to X$ 是可测的, 如果存在零测集 $E \subset I$ 和序列 $\{f_n\} \subset C_c(I, X)$, 使得 $f_n(t) \to f(t)$ 在 $I \setminus E$ 上成立.

易知, 如果 $f : I \to X$ 可测, 那么 $\|f\| : I \to \mathbb{R}$ 可测.

命题 1.2.1　设 $\{f_n\}$ 是从 I 到 X 的可测函数序列. 若 $f : I \to X$, 并且 $f_n(t) \to f(t)$ 对几乎所有的 $t \in I$ 成立, 则 f 是可测的.

证明 首先，存在零测集 $E \subset I$，使得在 $I \setminus E$ 上，$f_n \to f$. 设 $\{f_{n,k}\}$ 是具有紧支集的连续函数列，并且 $f_{n,k} \to f_n\ (k \to \infty)$ 几乎处处成立. 对序列 $\{\|f_{n,k} - f_n\|\}$ 应用 Egorov 定理知，存在 $E_n \subset I$ 满足 $|E_n| \leqslant 2^{-n}$，使得在 $I \setminus E_n$ 上一致地有 $f_{n,k} \to f_n$. 设 $k(n)$ 是使得 $\|f_{n,k(n)} - f_n\| \leqslant 1/n$ 在 $I \setminus E_n$ 上成立的下标，并令 $g_n = f_{n,k(n)}$. 取 $F = E \bigcup \left(\bigcap_{m \geqslant 0} \bigcup_{n > m} E_n \right)$，则 $|F| = 0$. 对任意 $t \in I \setminus F$，有 $f_n(t) \to f(t)$. 另一方面，对足够大的 n 以及 $t \in I \setminus E_n$，有 $\|g_n - f_n\| \leqslant 1/n$. 于是，$g_n(t) \to f(t)$，从而 f 可测. 证毕.

注 1.2.1 如果 $f: \mathbb{R} \to X$ 和 $\varphi: I \to \mathbb{R}$ 都可测，那么 $f(\varphi): I \to X$ 可测.

注 1.2.2 设 $\{x_n\}$ 是 X 中的序列，$\{\Omega_n\}$ 是 I 中的一列可测子集. 若对任意 $i \neq j$，都有 $\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$，则 $\sum\limits_n x_n \chi_{\Omega_n}$ 可测.

引理 1.2.2[13] 设 X 是可分的 Banach 空间，X^* 是它的对偶空间. 若 S^* 是 X^* 中的单位球，则在 S^* 中存在序列 $\{x'_n\}$，使得对任意 $x' \in S^*$，都有该序列的子序列 $\{x'_{n_k}\}$，满足 $x'_{n_k}(x) \to x'(x)$ 对所有 $x \in X$ 成立.

证明 取 X 中的稠密点列 $\{x_n\}$. 对每一个 n，按如下方式定义从 S^* 到 $\ell^2(n)$ 的映射 F_n:

$$F_n(x') = (x'(x_1), \cdots, x'(x_n)), \qquad \forall\, x' \in S^*.$$

因为 $\ell^2(n)$ 是可分的，所以存在 S^* 中的序列 $\{x'_{n_k}\}$，使得 $F_n(\{x'_{n_k}\})$ 在 $F_n(S^*)$ 中稠密. 特别地，对任意 $x' \in S^*$，存在 $x'_{n_{k(n)}} \in \{x'_{n_k}\}$，使得

$$|x'(x_j) - x'_{n_{k(n)}}(x_j)| \leqslant 1/n, \qquad \forall\, 1 \leqslant j \leqslant n.$$

由此推出，当 $n \to \infty$ 时，$x'_{n_{k(n)}}(x_j) \to x'(x_j)$ 对所有 $j \in \mathbb{N}$ 成立. 由于 $\{x_n\}$ 在 X 中稠密，因此当 $n \to \infty$ 时，对任意 $x \in X$，均有 $x'_{n_{k(n)}}(x) \to x'(x)$. 故引理成立. 证毕.

定理 1.2.3 (Pettis 定理) 设 $f: I \to X$，那么 f 可测当且仅当以下两个条件同时成立:

(1) f 是弱可测的 (对任意 $x' \in X^*$，函数 $t \mapsto \langle x', f(t) \rangle$ 可测)；

(2) 存在零测集 $\mathcal{N} \subset I$，使得 $f(I \setminus \mathcal{N})$ 是可分的.

证明 因为 f 可测，所以 f 弱可测. 设 $\{f_n\} \subset C_c(I, X)$，使得 $f_n \to f$ 在 $I \setminus \mathcal{N}$ 上成立，其中 $|\mathcal{N}| = 0$. 显而易见，$f_n(I \setminus \mathcal{N})$ 是可分的，从而 $f(I \setminus \mathcal{N})$ 也是可分的.

反之，假设 $f(I)$ 是可分的. 于是，X 也是可分的 (可用包含 $f(I)$ 的 X 的最小闭子空间来代替 X).

对于 $x \in X$, 我们断言：函数 $t \mapsto \|f(t)-x\|$ 可测. 事实上，对所有 $a \geqslant 0$, 有

$$\{t: \|f(t)-x\| \leqslant a\} = \bigcap_{\|x'\|\leqslant 1} \{t: |x'(f(t)-x)| \leqslant a\}.$$

由引理 1.2.2 可得

$$\{t: \|f(t)-x\| \leqslant a\} = \bigcap_{n\geqslant 0} \{t: |x'_n(f(t)-x)| \leqslant a\}.$$

易见，等号右边的集合是可测的，因而函数 $t \mapsto \|f(t)-x\|$ 可测.

对于每一个 $n \in \mathbb{N}$. 由于集合 $f(I)$ 是可分的，故它可以被可数个以 $x_{n,j}$ 为球心、以 $1/n$ 为半径的球 $B_n(x_{n,j})$ 来覆盖. 考察从 I 到 X 的映射 f_n:

$$f_n = \sum x_{n,j}\chi_{\Omega_{n,j}},$$

其中

$$\Omega_{n,0} = \{t: f(t) \in B_n(x_{n,0})\}, \qquad \Omega_{n,j} = \{t: f(t) \in B_n(x_{n,j})\} \setminus \bigcup_{0\leqslant i<j} B_n(x_{n,i}).$$

显然，$\Omega_{n,j}$ 两两不交. 由刚才证过的结论知，$\Omega_{n,j}$ 可测. 利用注 1.2.2 便知，f_n 可测. 另一方面，根据 f_n 的构造易知，$\|f_n(t)-f(t)\| \leqslant 1/n$ 对所有 $t \in I$ 成立. 运用命题 1.2.1 便可推出 f 可测. 证毕.

推论 1.2.4 若 $f: I \to X$ 弱连续 ($t_n \to t \Longrightarrow f(t_n) \rightharpoonup f(t)$ 在 X 中成立)，则 f 可测.

推论 1.2.5 设 $\{f_n\}$ 是从 I 到 X 的可测函数列，$f: I \to X$. 如果对几乎所有的 $t \in I$, 都有 $f_n(t) \rightharpoonup f(t)$ 成立，那么 f 可测.

1.2.2 可积函数

设 $f \in C_c(I, X)$, 则存在常数 $a < b$ 满足：$[a,b] \subset I$, 在 $I \setminus [a,b]$ 上 $f \equiv 0$. 用 Δ_n 表示 $[a,b]$ 的分割：

$$a = t_0 < t_1 < t_2 \cdots < t_n = b,$$

并记 $\|\Delta_n\| = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}\{t_{i+1}-t_i\}$, 令

$$x_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(t_{i+1}-t_i).$$

同于实值函数的 Riemann 积分，可以证明：当 $\|\Delta_n\| \to 0$ 时， $\{x_n\}$ 是 X 中的基本列. 故存在 $x \in X$, 使得

$$\lim_{\|\Delta_n\| \to 0} x_n = \lim_{\|\Delta_n\| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(t_{i+1} - t_i) = x.$$

对任意的 $\tau_i \in (t_i, t_{i+1})$, 若记

$$\tilde{x}_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\tau_i)(t_{i+1} - t_i),$$

则还可以证明

$$\lim_{\|\Delta_n\| \to 0} \tilde{x}_n = \lim_{\|\Delta_n\| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\tau_i)(t_{i+1} - t_i) = x.$$

定义

$$x = \int_I f(t) \mathrm{d}t$$

称为抽象函数 f 的 Riemann 积分. 按此定义，容易证明

$$\Big\| \int_I f(t) \mathrm{d}t \Big\| \leqslant \int_I \|f(t)\| \mathrm{d}t, \qquad \forall\, f \in C_c(I, X).$$

定义 1.2.2　称可测函数 $f : I \to X$ 是可积的, 如果存在序列 $\{f_n\} \subset C_c(I, X)$, 使得

$$\int_I \|f_n(t) - f(t)\| \mathrm{d}t \to 0.$$

注 1.2.3　因为函数 $\|f_n - f\|$ 非负可测，所以 $\int_I \|f_n(t) - f(t)\| \mathrm{d}t$ 有意义.

命题 1.2.6　设 $f : I \to X$ 可积, 则存在 $x \in X$, 使得对满足 $\int_I \|f_n(t) - f(t)\| \mathrm{d}t \to 0$ 的任意序列 $\{f_n\} \subset C_c(I, X)$, 都有 $\int_I f_n(t) \mathrm{d}t \to x$.

证明　因为

$$\Big\| \int_I f_n(t) \mathrm{d}t - \int_I f_p(t) \mathrm{d}t \Big\| \leqslant \int_I \|f_n(t) - f(t)\| \mathrm{d}t + \int_I \|f_p(t) - f(t)\| \mathrm{d}t,$$

所以 $\int_I f_n(t) \mathrm{d}t$ 是 Cauchy 列, 设其极限为 $x \in X$. 任取满足 $\int_I \|g_n(t) - f(t)\| \mathrm{d}t \to 0$ 的序列 $\{g_n\}$. 因为

$$\Big\| \int_I g_n(t) \mathrm{d}t - x \Big\| \leqslant \int_I \|g_n(t) - f(t)\| \mathrm{d}t + \int_I \|f_n(t) - f(t)\| \mathrm{d}t + \Big\| \int_I f_n(t) \mathrm{d}t - x \Big\|,$$

所以 $\int_I g_n(t)\mathrm{d}t \to x$. 证毕.

定义 1.2.3 把上面得到的极限 x 记为 $\int_I f(t)\mathrm{d}t$, 或 $\int f(t)\mathrm{d}t$. 当 $I=(a,b)$ 时, 也写成 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. 因为对实值函数来说, $\int_b^a f(t)\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, 所以这种记法更为方便.

命题 1.2.7 (Bochner 定理) 设 $f: I\to X$ 可测, 那么 f 可积当且仅当 $\|f\|$ 可积. 此外, 还有

$$\left\|\int_I f(t)\mathrm{d}t\right\| \leqslant \int_I \|f(t)\|\mathrm{d}t.$$

证明 假设 f 可积, 则对满足 $\int_I \|f_n(t)-f(t)\|\mathrm{d}t \to 0$ 的任意序列 $\{f_n\}\subset C_c(I,X)$, 都有 $\|f\|\leqslant \|f_n\| + \|f_n - f\|$, 从而 $\|f\|$ 可积.

反之, 假设 $\|f\|$ 可积. 设序列 $g_n\in C_c(I,\mathbb{R})$ 满足: 在 $L^1(I)$ 中 $g_n\to\|f\|$, 并且存在 $g\in L^1(I)$, 使得 $|g_n|\leqslant g$ 几乎处处成立. 选取序列 $\{f_n\}\subset C_c(I,X)$, 使得几乎处处有 $f_n\to f$. 令

$$u_n = \frac{|g_n|}{\|f_n\|+1/n} f_n,$$

则有 $\|u_n\|\leqslant g\in L^1(I)$, 并且 $u_n\to f$ 几乎处处成立, 于是 $\int_I \|u_n(t)-f(t)\|\mathrm{d}t\to 0$, 因而 f 可积. 此外, 由 Fatou 引理得

$$\left\|\int_I f(t)\mathrm{d}t\right\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\left\|\int_I u_n(t)\mathrm{d}t\right\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_I \|u_n(t)\|\mathrm{d}t = \int_I \|f(t)\|\mathrm{d}t.$$

证毕.

推论 1.2.8 (控制收敛定理) 设 $\{f_n\}: I\to X$ 是可积函数列, $g: I\to R^+$ 是可积函数, $f: I\to X$. 如果在 I 上几乎处处成立

$$\|f_n\|\leqslant g, \qquad \forall\, n\in\mathbb{N}; \qquad f_n\to f.$$

那么 f 可积, 且有 $\int_I f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_I f_n(t)\mathrm{d}t$.

1.2.3 $L^p(I,X)$空间

定义 1.2.4 设 $p\in[1,\infty]$. 把满足 $\|f(\cdot)\|\in L^p(I)$ 的所有可测函数 $f: I\to X$ 的集合 (等价类) 记作 $L^p(I,X)$. 对 $f\in L^p(I,X)$, 定义

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_I \|f(t)\|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}, & p<\infty; \\ \operatorname*{ess\,sup}_{t\in I}\|f(t)\|, & p=\infty. \end{cases}$$

命题 1.2.9 $(L^p(I,X),\|\cdot\|_p)$ 是 Banach 空间. 如果 $p<\infty$, 那么 $D(I,X)$ 在 $L^p(I,X)$ 中稠密.

证明 类似于实值函数的情况 (特别地, $D(I,X)$ 的稠密性可利用截断函数和卷积得到).

注 1.2.4 若 $f\in L^p(I,X)$, $g\in L^{p'}(I,X^*)$, 则函数 $\langle g(t),f(t)\rangle_{X^*,X}$ 在 I 上可积, 且有

$$\int_I |\langle g(t),f(t)\rangle_{X^*,X}|\mathrm{d}t\leqslant \|f\|_p\,\|g\|_{p'}.$$

下面的结论与前面的注有关, 其证明要比实值函数的情形困难得多.

定理 1.2.10 设 $1\leqslant p<\infty$, X 是自反的或 X^* 是可分的, 则 $(L^p(I,X))^*\approx L^{p'}(I,X^*)$. 此外, 如果 $1<p<\infty$, 且 X 是自反的, 那么 $L^p(I,X)$ 也是自反的.

证明参见文献 [6] 第 13 章定理 8 的推论 1 .

注 1.2.5 设 I 有界, $1\leqslant q\leqslant p\leqslant\infty$, 则 $L^p(I,X)\hookrightarrow L^q(I,X)$.

定义 1.2.5 设 $1\leqslant p\leqslant\infty$, 记

$$L^p_{\mathrm{loc}}(I,X)=\{f:I\to X\,|\,\text{对任意紧区间 } J\subset I,\text{ 有 } f|_J\in L^p(J,X)\}.$$

命题 1.2.11 设 $A:D(A)\subset X\to Y$ 是闭线性算子, $f:I\to D(A)$. 如果 $f\in L^1(I,X)$, 且 $Af\in L^1(I,Y)$, 那么 $\int_I f(t)\mathrm{d}t\in D(A)$, 且

$$A\int_I f(t)\mathrm{d}t=\int_I Af(t)\mathrm{d}t.$$

证明参见文献 [10] 的定理 4.2.10 .

命题 1.2.12 设 $A\in\mathcal{L}(X,Y)$. 若 $f\in L^p(I,X)$, 则 $Af\in L^p(I,Y)$, 且 $\|Af\|_p\leqslant\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|f\|_p$. 特别地, 当 $f\in L^1(I,X)$ 时, 还成立 $A\left(\int_I f(t)\mathrm{d}t\right)=\int_I Af(t)\mathrm{d}t$.

证明 首先讨论 $p<\infty$ 的情况. 当 $f\in\mathcal{D}(I,X)$ 时, 结论显然成立. 对于一般情况, 可利用稠密性 (命题 1.2.9) 进行论证. 当 $p=\infty$ 时, 显然 Af 可测, 并且

$$\|Af(t)\|_Y\leqslant\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|f(t)\|_X\leqslant\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|f\|_\infty$$

对几乎所有的 $t\in I$ 成立. 从而第一个结论成立. 后一个结论可由命题 1.2.11 得到. 证毕.

命题 1.2.11 和命题 1.2.12 在本书中是非常重要的, 将多次用于后续章节的证明中.

推论 1.2.13 若 $X\hookrightarrow Y$, $f\in L^1(I,X)$, 则 $f\in L^1(I,Y)$, 并且 f 在空间 X 和空间 Y 中的积分相等.

命题 1.2.14 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f: I \to X$. 如果 $\{f_n\}$ 是 $L^p(I,X)$ 中的有界列，并且对几乎所有的 $t \in I$, 有 $f_n(t) \rightharpoonup f(t)$(弱收敛)．那么 $f \in L^p(I,X)$, 且 $\|f\|_p \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_p$.

证明 由推论 1.2.5 知， f 可测．定义 g_n 和 g 如下

$$g_n(t) = \inf_{k\geqslant n} \|f_k(t)\|, \qquad g(t) = \lim_{n\to\infty} g_n(t),$$

则 $g(t) = \liminf\limits_{n\to\infty} \|f_n(t)\|$ 几乎处处成立．因为 $g_n(t) \leqslant \|f_n(t)\|$ 几乎处处成立，利用单调收敛定理知， g 可积，且有 $\|g\|_p = \lim\limits_{n\to\infty} \|g_n\|_p$. 再利用范数的弱下半连续性，推出

$$\|f\|_p \leqslant \|g\|_p = \lim_{n\to\infty} \|g_n\|_p \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p.$$

证毕.

1.2.4 抽象函数的导数

定义 1.2.6 设 $f: I \to X$, $t_0 \in I$. 如果 $\lim\limits_{t\to t_0} \|f(t) - f(t_0)\| \to 0$, 则称 f 在点 t_0 连续．若 f 在 I 中的每一点都连续，则称 f 在 I 上连续.

定义 1.2.7 设 $f: I \to X$, $t_0 \in I$. 若存在 $x_0 \in X$, 使得

$$\lim_{\Delta t\to 0} \left\| \frac{f(t_0+\Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} - x_0 \right\| = 0,$$

则称 $f(t)$ 在点 $t = t_0$ 处可微， x_0 称为 $f(t)$ 在点 t_0 处的导数，即

$$f'(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{f(t_0+\Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

如果 $f(t)$ 在 I 中的每一点都是可微的，则称 $f(t)$ 在 I 上可微．导函数 $f'(t): I \to X$ 为抽象函数.

定理 1.2.15 (1) 若 $f'(t)$ 在 $I = [a,b]$ 上连续，则 Newton-Leibniz 公式成立，即

$$\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t = f(b) - f(a). \tag{1.1}$$

(2) 若 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且在 (a,b) 内可微，则存在 $a < \xi < b$, 使得

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant (b-a)\|f'(\xi)\|.$$

(3) 假设 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续．令

$$y(t) = \int_a^t f(s)\mathrm{d}s, \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

则 $y(t)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 且有 $y'(t)=f(t),\ \forall\, a\leqslant t\leqslant b$.

证明 (1) 任取 $F\in X^*$, 考察 $[a,b]$ 上的实函数 $g(t)=F(f(t))$. 容易看出, 对 $a\leqslant t\leqslant b$ 有 $g'(t)=F(f'(t))$, 并且 $g'(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 由实函数的 Newton-Leibniz 公式得

$$\int_a^b g'(t)\mathrm{d}t=g(b)-g(a)=F(f(b))-F(f(a)).$$

利用命题 1.2.12, 便有

$$F\left(\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t\right)=\int_a^b F(f'(t))\mathrm{d}t=\int_a^b g'(t)\mathrm{d}t=F(f(b))-F(f(a)),$$

即

$$F\left(\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t-f(b)+f(a)\right)=0.$$

由 $F\in X^*$ 的任意性即知, (1.1) 式成立.

(2) 由 Hahn-Banach 定理知, 存在 $F\in X^*$, 使得 $\|F\|=1$, 并且 $F(f(b)-f(a))=\|f(b)-f(a)\|$. 令 $g(t)=F(f(t))$. 利用微分中值定理知, 存在 $a<\xi<b$, 使得

$$\begin{aligned}\|f(b)-f(a)\| &= g(b)-g(a)=g'(\xi)(b-a)=F(f'(\xi))(b-a)\\ &\leqslant \|F\|\cdot\|f'(\xi)\|(b-a)=\|f'(\xi)\|(b-a).\end{aligned}$$

(3) 任取 $t\in[a,b]$. 对 $\varepsilon>0$, 由 $f(t)$ 的连续性知, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|t-s|<\delta$ 时, $\|f(t)-f(s)\|<\varepsilon$. 于是, 当 $|\Delta t|<\delta$ 时, 就有

$$\begin{aligned}\left\|\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}-f(t)\right\| &= \left\|\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}[f(s)-f(t)]\mathrm{d}s\right\|\\ &\leqslant \frac{1}{|\Delta t|}\int_t^{t+\Delta t}\|f(s)-f(t)\|\mathrm{d}s\\ &\leqslant \frac{1}{|\Delta t|}\int_t^{t+\Delta t}\varepsilon\mathrm{d}s=\varepsilon.\end{aligned}$$

因此由 t 的任意性知, $y'(t)=f(t)$ 在 $[a,b]$ 上成立. 证毕.

1.2.5 抽象广义函数

定义 1.2.8 记空间 $\mathcal{L}(\mathcal{D}(I),X)$ 为 $\mathcal{D}'(I,X)$, 称之为 I 上的 $X-$ 值广义函数空间. 对任意 $T\in\mathcal{D}'(I,X)$ 和 $\varphi\in\mathcal{D}(I)$, 记 $\langle T,\varphi\rangle=T(\varphi)\in X$.

注 1.2.6 设 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(I,X)$, 令

$$\langle T_f,\varphi\rangle=\int_I f(t)\varphi(t)\mathrm{d}t,\qquad \forall\,\varphi\in\mathcal{D}(I).$$

由此定义了一个广义函数 $T_f \in \mathcal{D}'(I,X)$. 有时也用 f 来表示 T_f.

定义 1.2.9 设 $T \in \mathcal{D}'(I,X)$, 定义 T 的广义导数 $T' \in \mathcal{D}'(I,X)$ 为

$$\langle T', \varphi\rangle = -\langle T, \varphi'\rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

命题 1.2.16 设 $1 \leqslant p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R},X)$. 令

$$T_h f(t) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s)\mathrm{d}s, \qquad t \in \mathbb{R},\ h \neq 0,$$

则 $T_h f \in L^p(\mathbb{R},X) \cap C_b(\mathbb{R},X)$, 并且当 $h \to 0$ 时, 对几乎所有的 t, 在 $L^p(\mathbb{R},X)$ 中, 有 $T_h f \to f$.

证明 利用 Hölder 不等式, 易证 $T_h f \in C(\mathbb{R},X)$, 同时

$$\|T_h f(t)\|^p \leqslant \frac{1}{|h|}\int_t^{t+h} \|f(s)\|^p \mathrm{d}s.$$

因此 (不妨认为 $h > 0$)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \|T_h f(t)\|^p \mathrm{d}t &\leqslant \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}}\int_t^{t+h} \|f(s)\|^p \mathrm{d}s\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}s \int_{s-h}^{s} \|f(s)\|^p \mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} \|f(s)\|^p \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由此推出, $T_h \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R},X))$, 且有 $\|T_h\| \leqslant 1$. 令 $A_h = T_h - I$, 则 $\|A_h\|_{\mathcal{L}(L^p)} \leqslant 2$. 选取序列 $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R},X)$, 使得在 $L^p(\mathbb{R},X)$ 上, $f_n \to f$. 于是

$$\begin{aligned}\|A_h f(\cdot)\|_p &\leqslant \|A_h(f_n(\cdot) - f(\cdot))\|_p + \|A_h f_n(\cdot)\|_p \\ &\leqslant 2\|f_n(\cdot) - f(\cdot)\|_p + \|A_h f_n(\cdot)\|_p.\end{aligned}$$

对任意固定的 $\varepsilon > 0$, 存在适当大的 n, 使得 $\|f_n(\cdot) - f(\cdot)\|_p < \varepsilon/4$. 固定这样的 n, 则由 $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R},X)$ 知, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|h| < \delta$ 时, $\|A_h f_n\|_p < \varepsilon/2$. 故 $\|A_h f\|_p \to 0$. 证毕.

推论 1.2.17 设 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I,X)$, 并且作为 $\mathcal{D}'(I,X)$ 中的元素 $f = 0$. 则 $f = 0$ 几乎处处成立.

证明 首先断言: 如果 J 是 I 的一个闭子区间, 那么 $\int_J f(t)\mathrm{d}t = 0$. 事实上, 取 $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(I)$ 满足 $\varphi_n \leqslant 1$, 且 $\varphi_n \to \chi_J$ 几乎处处成立. 则有

$$\int_J f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_I f(t)\varphi_n(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\langle f, \varphi_n\rangle = 0.$$

固定任意闭子区间 $J \subset I$, 考察按如下方式所定义的 $\bar{f} \in L^1(\mathbb{R}, X)$：

$$\bar{f}(t) = f(t), \quad t \in J; \qquad \bar{f}(t) = 0, \quad t \notin J.$$

由此推出，对所有 $h > 0, T_h \bar{f} = 0$ 成立. 利用命题 1.2.16 便知， $\bar{f} = 0$ 几乎处处成立. 于是，在 J 上几乎处处有 $f = 0$. 由 J 的任意性知， $f = 0$ 几乎处处成立.

推论 1.2.18 设 $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(I, X), t_0 \in I$. 令 $f(t) = \int_{t_0}^t g(s)\mathrm{d}s \in C(I, X)$. 则有

(1) $f' = g$ 在 $\mathcal{D}'(I, X)$ 中成立;

(2) f 几乎处处可微，且 $f' = g$ 几乎处处成立.

证明 同于前面的推导，我们仅考虑 $I = \mathbb{R}$ 和 $g \in L^1(\mathbb{R}, X)$ 的情况. 因为

$$T_h g(t) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h},$$

所以由命题 1.2.16 可推出结论 (2) .

下证结论 (1) . 任取 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, 则有

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

进一步还有，当 $h \to 0$ 时，在 $\mathbb{R}$ 上一致地成立

$$\frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} \to \varphi'(t).$$

因此，由命题 1.2.16 得

$$\begin{aligned}
\langle f', \varphi \rangle &= -\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} \mathrm{d}t \\
&= -\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \frac{f(t-h) - f(t)}{h} \mathrm{d}t \\
&= \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} T_{-h} g \varphi \mathrm{d}t = \langle g, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

故结论 (1) 成立.

命题 1.2.19 设 $T \in \mathcal{D}'(I, X)$ 满足 $T' = 0$, 则存在 $x_0 \in X$, 使得在 $\mathcal{D}'(I, X)$ 上， $T = x_0$, 即

$$\langle T, \varphi \rangle = x_0 \int_I \varphi(t)\mathrm{d}t, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

证明 取 $\theta \in \mathcal{D}(I)$ 满足 $\int_I \theta(t)\mathrm{d}t = 1$. 记 $x_0 = \langle T, \theta \rangle$. 取 $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ 使得 $\operatorname{supp}\theta \cup \operatorname{supp}\varphi \subset (a, b) \subset I$. 再取 $t_0 \in I$ 满足 $t_0 < a$. 定义 $\psi \in \mathcal{D}(I)$ 为

$$\psi(t) = \int_{t_0}^t \left(\varphi(s) - \theta(s) \int_I \varphi(\sigma)\mathrm{d}\sigma \right) \mathrm{d}s, \qquad t \in I,$$

则有

$$\psi' = \varphi - \theta \int_I \varphi(t)\mathrm{d}t.$$

于是，有

$$0 = -\langle T', \psi\rangle = \langle T, \psi'\rangle = \langle T, \varphi\rangle - x_0 \int_I \varphi(t)\mathrm{d}t,$$

即

$$\langle T, \varphi\rangle = x_0 \int_I \varphi(t)\mathrm{d}t.$$

证毕.

1.2.6 $W^{1,p}(I,X)$ 空间

定义 1.2.10 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$. 用 $W^{1,p}(I,X)$ 表示在 $\mathcal{D}'(I,X)$ 意义下满足 $f' \in L^p(I,X)$ 的所有 $L^p(I,X)$ 中的函数 f(或其等价类) 的全体. 对于 $f \in W^{1,p}(I,X)$, 定义 $\|f\|_{W^{1,p}} = \|f\|_p + \|f'\|_p$.

命题 1.2.20 $(W^{1,p}(I,X), \|\cdot\|_{W^{1,p}})$ 是 Banach 空间.

证明与实值函数的情况类似.

定理 1.2.21 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L^p(I,X)$, 那么以下结论等价:

(1) $f \in W^{1,p}(I,X)$;

(2) 存在 $g \in L^p(I,X)$, 使得对几乎所有的 $t_0, t \in I$, 有 $f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^t g(s)\mathrm{d}s$;

(3) 存在 $g \in L^p(I,X)$, $x_0 \in X$ 以及 $t_0 \in I$, 使得 $f(t) = x_0 + \int_{t_0}^t g(s)\mathrm{d}s$ 对几乎所有的 $t \in I$ 成立;

(4) f 绝对连续、几乎处处可微，且 $f' \in L^p(I,X)$;

(5) f 弱绝对连续、几乎处处弱可微，且 $f' \in L^p(I,X)$.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 设 $t_0 \in I$. 对任意 $t \in I$, 令

$$w(t) = f(t) - f(t_0) - \int_{t_0}^t f'(s)\mathrm{d}s.$$

由推论 1.2.18 知，作为广义函数 $w' = 0$. 从而由命题 1.2.19 知，存在 $x_0 \in X$, 作为广义函数 $w = x_0$. 因为 $w(t_0) = 0$, 再由推论 1.2.17 知， $w = 0$ 几乎处处成立. 这说明结论 (2) 成立.

(2)$\Longrightarrow$(3) 是显然的.

(3)$\Longrightarrow$(4) 改变 f 在零测集上的值，不妨认为

$$f(t) = x_0 + \int_{t_0}^t g(s)\mathrm{d}s, \qquad \forall\, t \in I.$$

从而由推论 1.2.18 知，结论 (4) 成立.

(4)$\Longrightarrow$(5) 是显然的.

(5)$\Longrightarrow$(1) 设 g 是 f 的弱导数. 对 $t_0 \in I$, 令

$$\varphi(t) = f(t) - f(t_0) - \int_{t_0}^{t} g(s)\mathrm{d}s, \qquad t \in I.$$

由推论 1.2.18 知， φ 几乎处处弱可微，其弱导数几乎处处为 0.

任取 $x' \in X^*$, 定义 $\psi(t) = \langle x', \varphi(t)\rangle$. 那么 ψ 绝对连续、几乎处处可微，并且 $\psi'(t) = 0$ 几乎处处成立. 由 $\psi(t_0) = 0$ 推得 $\psi(t) \equiv 0$. 由 x' 的任意性即知，$\varphi(t) \equiv 0$. 故由推论 1.2.18 可得结论 (1) . 证毕.

推论 1.2.22 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 则 $W^{1,p}(I,X) \hookrightarrow C_{b,u}(I,X)$.

证明 因为对任意的 $f \in W^{1,p}(I,X)$, 有

$$\|f(t) - f(s)\| \leqslant \int_{s}^{t} \|f'(\sigma)\| d\sigma, \qquad \forall\, s, t \in I,$$

由此即可推出 f 的一致连续性. 下证 f 的有界性.

令 $h(\cdot) = \|f(\cdot)\|$, 则

$$|h(t) - h(s)| \leqslant \|f(t) - f(s)\|.$$

由此推出

$$|h(t) - h(s)| \leqslant \int_{s}^{t} \|f'(\sigma)\| d\sigma, \qquad \forall\, s, t \in I.$$

于是， h 绝对连续且 $|h'| \leqslant \|f'\| \in L^p(I)$ 几乎处处成立. 这蕴涵 $h \in W^{1,p}(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$. 从而 f 有界，故 $f \in C_{b,u}(I,X)$. 证毕.

推论 1.2.23 如果 I 有界，那么 $C^\infty(I,X)$ 在 $W^{1,p}(I,X)$ 中稠密.

证明 设 $f \in W^{1,p}(I,X)$. 取序列 $\{g_n\} \subset \mathcal{D}(I,X)$, 使得在 $L^p(I,X)$ 上， $g_n \to f'$. 对 $t_0 \in I$, 定义

$$f_n(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^{t} g_n(s)\mathrm{d}s.$$

易证 $f_n \in C^\infty(I,X)$, 并且在 $W^{1,p}(I,X)$ 上， $f_n \to f$. 证毕.

推论 1.2.24 设 $1 < p < \infty$, 则 $W^{1,p}(I,X) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(I,X)$, 其中 $\alpha = (p-1)/p$.

推论 1.2.25 设 $I = (a,b)$, $1 \leqslant p < \infty$, $f \in W^{1,p}(I,X)$, 则对任意 $c \in I$, 当 $h \searrow 0$ 时，在 $L^p((a,c), X)$ 上，有

$$\frac{f(\cdot + h) - f(\cdot)}{h} \longrightarrow f'.$$

证明 在 $\mathbb{R}$ 上把 f 延拓为函数 $\bar{f} \in W^{1,p}(\mathbb{R}, X)$, 利用命题 1.2.16 和定理 1.2.21 即得结论.

定理 1.2.26 设 X 是自反的, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L^p(I, X)$. 那么 $f \in W^{1,p}(I, X)$ 当且仅当存在 $\varphi \in L^p(I, \mathbb{R})$, 使得

$$\|f(\tau) - f(t)\| \leqslant \left|\int_t^\tau \varphi(s)\mathrm{d}s\right| \tag{1.2}$$

对几乎所有的 $t, \tau \in I$ 成立. 此外, 若 (1.2) 式成立, 还有 $\|f'\|_{L^p(I,X)} \leqslant \|\varphi\|_{L^p(I,\mathbb{R})}$.

证明 易见必要性成立 (可取 $\varphi(\cdot) = \|f'(\cdot)\|$) .

现证充分性. 注意到 X 是完备的, 于是改变 f 在零测集上的值, 可使 (1.2) 式对所有 $t, \tau \in I$ 成立. 特别地, f 是连续的, 并且可以只考虑 $I = \mathbb{R}$ 的情况. 由 (1.2) 式知, $f(\mathbb{R})$ 是可分的. 不妨认为 X 是可分的 (若不然, 可以在包含 $f(\mathbb{R})$ 的 X 的最小闭子空间上研究) , 从而 X^* 也是可分的. 对任意 $h > 0$, 定义

$$f_h(t) := \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

当 $p = \infty$ 时, 显而易见 f_h 在 $L^p(\mathbb{R}, X)$ 上关于 h 有界. 当 $p < \infty$ 时, 由 Hölder 不等式得

$$\|f_h(t)\|^p \leqslant \frac{1}{h}\int_t^{t+h} |\varphi(s)|^p \mathrm{d}s.$$

在 $\mathbb{R}$ 上积分上式, 就推出

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \|f_h(t)\|^p \mathrm{d}t &\leqslant \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}}\int_t^{t+h} |\varphi(s)|^p \mathrm{d}s\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}}\int_{s-h}^{s} |\varphi(s)|^p \mathrm{d}t\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}} |\varphi(s)|^p \mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{1.3}$$

这说明 f_h 在 $L^p(\mathbb{R}, X)$ 上关于 h 有界. 设序列 $\{x'_n\}$ 在 X^* 中稠密. 对任意 n, 函数 $\psi_n(t) = \langle x'_n, f(t)\rangle$ 满足

$$|\psi_n(\tau) - \psi_n(t)| \leqslant \|x'_n\|\left|\int_t^\tau \varphi(s)\mathrm{d}s\right|.$$

由此知, ψ_n 在 $\mathbb{R}$ 上绝对连续, 从而 ψ_n 在 $\mathbb{R}\backslash E_n$ 上可微, 其中 $|E_n| = 0$. 令 $E = \bigcup E_n$, 则 $|E| = 0$. 对所有 $t \in \mathbb{R}\backslash E$ 与 $n \in \mathbb{N}$, 当 $h \to 0$ 时, $\langle x'_n, f_h(t)\rangle \to \psi'_n(t)$. 令 F 是 φ 的 Lebesgue 点集的余集 (可知 $|F| = 0$) . 由 (1.2) 式知, 只要 h 充分小, 那么对任意 $t \in \mathbb{R}\backslash F$, 都有 $\|f_h(t)\| \leqslant K(t) < \infty$. 因为对任意 $t \in \mathbb{R}\backslash(E \bigcup F)$, $\|f_h(t)\|$ 是有界的, 并且 X 是自反的, 所以存在序列 $h_n \to 0$ (仍记为 h) 及 $w(t) \in X$, 使得当 $h \to 0$ 时, $f_h(t) \rightharpoonup w(t)$.

此外，对任意 $n\in\mathbb{N}$, 有 $\langle x_n', w(t)\rangle=\psi_n'(t)$. 因为序列 $\{x_n'\}$ 在 X^* 中稠密，所以 $w(t)$ 不依赖于序列 $\{h_n\}$ 的选取，因而 $f_h(t)\rightharpoonup w(t)$ 总成立. 由命题 1.2.14 知，$w\in L^p(\mathbb{R},X)$, 且 $\|w\|_{L^p(I,X)}\leqslant\|\varphi\|_{L^p(I,\mathbb{R})}$. 再利用定理 1.2.21 的结论 (5) 及推论 1.2.18 可知，$f\in W^{1,p}(\mathbb{R},X)$ 且 $f'=w$. 证毕.

由此即可推出以下结论.

推论 1.2.27 设 X 是自反的，$f:I\to X$ 是有界的 Lipschitz 连续函数，Lipschitz 常数记为 L. 那么 $f\in W^{1,\infty}(I,X)$, 且有 $\|f'\|_\infty\leqslant L$.

推论 1.2.28 设 X 是自反的，$1<p\leqslant\infty$, 序列 $\{f_n\}$ 在 $W^{1,p}(I,X)$ 上有界. 若存在 $f:I\to X$, 使得 $f_n(t)\rightharpoonup f(t)$ 在 I 上几乎处处成立. 则 $f\in W^{1,p}(I,X)$, 且有 $\|f'\|_p\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}\|f_n'\|_p$.

证明 由命题 1.2.14 知，$f\in L^p(I,X)$. 设 E 是一个零测集，使得 $f_n(t)\rightharpoonup f(t)$ 在 $I\setminus E$ 上成立. 那么对任意满足 $t<\tau$ 的 $t,\tau\in I\backslash E$, 有

$$\|f(t)-f(\tau)\|\leqslant\liminf_{n\to\infty}\|f_n(t)-f_n(\tau)\|\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int_t^\tau\|f_n'(s)\|\mathrm{d}s. \tag{1.4}$$

令 $\varphi_n=\|f_n'\|$, 则 φ_n 在 $L^p(I,\mathbb{R})$ 上有界. 因而存在子序列 $\{\varphi_{n_k}\}$ 及函数 $\varphi\in L^p(I,\mathbb{R})$, 使得在 $L^p(I,\mathbb{R})$ 上，$\varphi_{n_k}\rightharpoonup\varphi$(当 $p=\infty$ 时，此处的收敛为弱 $\rightharpoonup\star$ 收敛)，并且 $\liminf\limits_{k\to\infty}\|\varphi_{n_k}\|_p=\liminf\limits_{n\to\infty}\|\varphi_n\|_p$. 特别有

$$\int_t^\tau\varphi_{n_k}(s)\mathrm{d}s\longrightarrow\int_t^\tau\varphi(s)\mathrm{d}s,\qquad\forall\ t,\tau\in I, \tag{1.5}$$

$$\|\varphi\|_p\leqslant\liminf_{n\to\infty}\|f_n'\|_p. \tag{1.6}$$

由 (1.4) 式及 (1.5) 式可得

$$\|f(t)-f(\tau)\|\leqslant\int_t^\tau\varphi(s)\mathrm{d}s,\qquad\forall\ t,\tau\in I,\ t<\tau.$$

所以 $f\in W^{1,p}(I,X)$(定理 1.2.26). 再由 (1.6) 式即得结论. 证毕.

习 题 一

1.1 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是有界光滑区域，用 λ 表示 $-\Delta$ 在 Ω 上带有齐次 Dirichlet 边界条件的第一特征值，$m>-\lambda$. 利用 Poincaré 不等式证明：

$$\left(\int_\Omega(|\nabla u|^2+mu^2)\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

等价于通常意义下 $H_0^1(\Omega)$ 中的范数 $\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$.

1.2 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是有界光滑区域， $0 < T < \infty, 1 < p, q < \infty, 0 < \alpha < 1$. 分别写出下列各空间的范数：

(1) $L^q((0,T), L^p(\Omega))$;

(2) $L^\infty((0,T), L^p(\Omega))$;

(3) $C([0,T], L^p(\Omega))$;

(4) $W^{1,q}((0,T), L^p(\Omega))$;

(5) $L^q((0,T), W^{1,p}(\Omega))$;

(6) $L^q((0,T), C^\alpha(\Omega))$;

(7) $C^\alpha([0,T], L^p(\Omega))$,

并证明 $C([0,T], L^p(\Omega))$ 是 Banach 空间.

1.3 证明命题 1.2.11 的一个特殊情形：假设 $A: D(A) \subset X \to X$ 是闭线性算子. 如果 $f: [a,b] \to D(A)$, f 和 Af 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \in D(A)$ 且

$$A\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b Af(t)\mathrm{d}t.$$

1.4 证明注 1.2.4 .

1.5 设 $\alpha, \beta, \theta > 0$. 令

$$f(t,x) = \frac{(1+t^2)^\theta}{|x|^\alpha (1+|x|)^\beta}, \qquad x \in \mathbb{R}^N,\ t \geqslant 0.$$

试确定 p 和 q 的值，使得 $f \in L^q((0,\infty), L^p(\mathbb{R}^N))$, 并求出 f_t 以及 f_t 的算子范数.

1.6 设 $\alpha \in (0,1)$, 并记 $B_1(0) = \{x = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$. 对于

$$f(t,x) = \frac{t^{1/2}x_1 + tx_2}{(|x_1| + 2|x_2|)^{1+\alpha}}, \qquad x \in B_1(0),\ t \in [0,1].$$

试确定 p, 使得 $f \in C([0,1], L^p(B_1(0)))$, 并证明 $f: [0,1] \to L^p(B_1(0))$ 是 Lipschitz 连续的.

1.7 证明推论 1.2.24 .

第二章　线性算子和谱

§2.1　预 备 知 识

本节叙述有关 Banach 空间和线性算子的一些结论.

定义 2.1.1　设 X 和 Y 都是 Banach 空间， $A: X \to Y$ 是线性映射. 集合 $G(A) = \{(x,y) \in X \times Y : x \in D(A), y = Ax\}$ 称为 A 的图.

定理 2.1.1 (闭图象定理)　设 X 和 Y 都是 Banach 空间， $A: X \to Y$ 是线性映射. 那么 $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ 当且仅当 $G(A)$ 是闭的.

定理 2.1.2 (Banach 不动点定理)　设 (E,d) 是完备的度量空间，映射 $f: E \to E$. 如果存在 $k \in [0,1)$, 使得 $d(f(x), f(y)) \leqslant kd(x,y)$ 对任意 $(x,y) \in E \times E$ 成立. 那么存在唯一的 $x_0 \in E$, 使得 $f(x_0) = x_0$.

利用 Banach 不动点定理，可以得到下面的结论.

定理 2.1.3 (压缩映像原理)　设 (E,d) 是完备的度量空间, 映射 $f: E \to E$. 如果存在 $n \geqslant 1$ 和 $k \in [0,1)$, 使得 $d(f^n(x), f^n(y)) \leqslant kd(x,y)$ 对任意 $(x,y) \in E \times E$ 成立. 那么存在唯一的 $x_0 \in E$, 使得 $f(x_0) = x_0$.

证明　由定理 2.1.2 知，存在唯一的 $x \in X$, 使得 $f^n(x) = x$. 因为 $f^n(f(x)) = f(f^n(x)) = f(x)$, 所以 $f(x) = x$. 如果还存在一个 $y \in X$, 满足 $f(y) = y$, 那么就有 $f^n(y) = y$, 从而 $y = x$. 证毕.

定理 2.1.4　设 M 是线性赋范空间 X 的子空间. 若 $x \in X \setminus \overline{M}$, 则存在 $f \in X^*$, 使得

$$\|f\| = 1,\ \ f(x) = \mathrm{dist}(x, M) > 0,\ \text{且}\ f(y) = 0, \qquad \forall\, y \in M.$$

证明　定义子空间 $N = \{y + \lambda x : y \in M,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$ 及映射

$$g(y + \lambda x) = \lambda d, \qquad y \in M,\ \lambda \in \mathbb{K},$$

其中 $d = \mathrm{dist}(x, M)$. 因为对于 $y \in M$, $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, 有

$$\|x + (1/\lambda)y\| = \|x - (-1/\lambda)y\| \geqslant d = g(x + (1/\lambda)y),$$

所以 $g \in N^*$, 且 $\|g\| \leqslant 1$. 选取 $\{y_n\} \subset M$ 满足 $\|x - y_n\| \to d$, 则有 $|g(y_n - x)|/\|y_n - x\| = d/\|y_n - x\| \to 1$. 从而 $\|g\| = 1$. 根据 Hahn-Banach 定理，可以将 g 保范延拓为 $f \in X^*$, 故定理成立. 证毕.

注 2.1.1 设 X 是线性赋范空间， $x \in X, x \neq 0$. 若取 $M = \{0\}$, 则利用定理 2.1.4 以及尺度变换知，存在 $f \in X^*$, 使得

$$f(x) = \|x\|^2 = \|f\|^2.$$

这样的 f 称为在 x 处的标准切泛函. 定义对偶集

$$F(x) = \{f : f \in X^*, f(x) = \|x\|^2 = \|f\|^2\} \neq \varnothing. \tag{2.1}$$

定理 2.1.5 设 X 和 Y 都是线性赋范空间. 如果 $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, 那么 $A^* \in \mathcal{L}(Y^*,X^*)$, 并且 $\|A\| = \|A^*\|$.

定理 2.1.6 设 X 和 Y 都是线性赋范空间， Y 是自反的. 如果 A 是从 X 到 Y 的闭稠定线性算子，那么 $D(A^*)$ 在 Y^* 中稠密.

称 Hilbert 空间 H 上的线性算子 S 为 **对称的** ，如果

$$\langle Sx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle, \qquad \forall\, x, y \in D(S).$$

H 上的线性算子 A 称为是 **自共轭**(**斜共轭**) 的，如果 A 是稠定的，并且 $A = A^*$ ($A^* = -A$) . 因此，A 是自共轭算子当且仅当 A 是对称的、稠定的且 $D(A^*) = D(A)$. 如果 $A \in \mathcal{L}(H)$, 那么 A 是自共轭的当且仅当 A 是对称的. 自共轭算子和斜共轭算子都是闭算子.

定义 2.1.2 设 A 是线性赋范空间 X 上的线性算子, $\mathbb{K}$ 是数域. A 的 **预解集**(记为 $\rho(A)$) 是所有这样的 $\lambda \in \mathbb{K}$ 构成的集合：$\lambda \in \rho(A)$ 当且仅当存在 $R(\lambda, A) \in \mathcal{L}(X)$, 满足

(1) 对每一个 $y \in X$, 都有 $R(\lambda, A)y \in D(A)$, 且 $(A - \lambda I)R(\lambda, A)y = y$;

(2) $R(\lambda, A)(A - \lambda I)x = x$ 对所有 $x \in D(A)$ 成立.

当 $\lambda \in \rho(A)$ 时，称 $R(\lambda, A)$ 为 A 在 λ 处的 **预解式** ，通常记为 $(A - \lambda I)^{-1}$. 称集合 $\sigma(A) = \mathbb{K} \setminus \rho(A)$ 为 A 的 **谱**, 而集合

$$\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \text{存在}\, x \in D(A),\, x \neq 0, \text{使得}\, Ax = \lambda x\}$$

称为 A 的 **点谱** ， $\sigma_p(A)$ 中的元素称为 A 的 **特征值** ，算子 $(A - \lambda I)$ 的零子空间 $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ 中的非零元素称为 A 的 **特征向量** .

A 的预解集 $\rho(A)$ 非空蕴涵 A 一定是闭的.

命题 2.1.7 如果 A 是 Banach 空间上的闭线性算子，那么 $\lambda \in \rho(A)$ 当且仅当 $A - \lambda I$ 是 1–1 的、到上的.

定理 2.1.8 设 X 和 Y 都是 Banach 空间. 若 A 是从 X 到 Y 的闭稠定线性算子，则下面的两个命题等价：

(1) A 是 1–1 的、到上的，且 $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$;

(2) A^* 是 1–1 的、到上的，并且 $(A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*, Y^*)$.

此外，当结论 (1) 或结论 (2) 成立时，还有 $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

假定 $\lambda, \zeta \in \rho(A)$. 如果 $x \in X$, 那么 $y = (A-\lambda I)^{-1}x - (A-\zeta I)^{-1}x \in D(A)$, 并且成立

$$(A-\lambda I)y = x - (A - \zeta I + \zeta I - \lambda I)(A-\zeta I)^{-1}x = (\lambda - \zeta)(A-\zeta I)^{-1}x.$$

用 $(A-\lambda I)^{-1}$ 作用于上式两边就得到 **预解恒等式**

$$(A-\lambda I)^{-1} - (A-\zeta I)^{-1} = (\lambda-\zeta)(A-\lambda I)^{-1}(A-\zeta I)^{-1}, \qquad \forall\, \lambda, \zeta \in \rho(A). \tag{2.2}$$

该恒等式表明，当 $\lambda, \zeta \in \rho(A)$ 时，算子 $(A-\lambda I)^{-1}$ 和 $(A-\zeta I)^{-1}$ 是可交换的.

定理 2.1.9 设 X 是 Banach 空间，$A \in \mathcal{L}(X)$. 如果存在整数 $n \geqslant 1$, 使得 $|\lambda| > \|A^n\|^{1/n}$, 那么 $\lambda \in \rho(A)$, 且有

$$(A-\lambda I)^{-1}x = -\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1}A^k x, \qquad \forall\, x \in X. \tag{2.3}$$

定理 2.1.10 设 A 是 Banach 空间 X 中的线性算子，则 $\rho(A)$ 是开集，$\sigma(A)$ 是闭集. 此外，如果存在 $\lambda \in \rho(A)$ 和 $\zeta \in \mathbb{K}$, 使得 $|\lambda-\zeta| \cdot \|(A-\lambda I)^{-1}\| < 1$, 那么 $\zeta \in \rho(A)$. 进一步还有，A 的预解式属于 $\mathcal{L}(X)$ 且是可微的，其导函数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(A-\lambda I)^{-1} = [(A-\lambda I)^{-1}]^2, \qquad \forall\, \lambda \in \rho(A).$$

设 $D \subset \mathbb{C}$ 是非空开集，X 是复 Banach 空间. 称函数 $f: D \to X$ 在 D 中**解析**，如果它在 D 中是可微的，即存在 $f': D \to X$, 使得

$$\lim_{w \to z} \left\| \frac{f(w)-f(z)}{w-z} - f'(z) \right\| = 0, \qquad \forall\, z \in D.$$

定理 2.1.10 说明，如果一个算子的预解集是 $\mathbb{C}$ 上的非空集合，那么这个算子的预解式是解析的.

定理 2.1.11 若 A 是 Banach 空间 X 中的闭稠定线性算子，则 $\sigma(A^*) = \{\lambda : \bar{\lambda} \in \sigma(A)\}$, 且有

$$((A-\lambda I)^{-1})^* = (A^* - \bar{\lambda} I)^{-1}, \qquad \forall\, \lambda \in \rho(A).$$

命题 2.1.12 设 A, B 是 Banach 空间中的线性算子, 且 A 是 B 的一个延拓. 若 $\rho(A)\cap\rho(B)\neq\varnothing$, 则 $A=B$.

§2.2 增生算子与耗散算子

增生算子和耗散算子是算子半群理论中的一类非常重要的线性算子. 本节将详细讨论这类算子.

定义 2.2.1 称 Banach 空间 X 中的线性算子 A 为 **增生的** (accretive) , 如果对每一个 $x\in D(A)$, 都存在 $f\in F(x)$, 使得 $\mathrm{Re}\langle Ax, f\rangle\geqslant 0$. 如果 $-A$ 是增生的, 则称 A 为 **耗散的** . 这里 $F(x)$ 为对偶集, 其定义由 2.1 节中的 (2.1) 式给出.

命题 2.2.1 A 是增生的当且仅当

$$\|x+\lambda Ax\|\geqslant\|x\|,\qquad \forall\, x\in D(A),\ \lambda>0. \tag{2.4}$$

证明可参见文献 [12] 中第 1 章的定理 4.2 .

定理 2.2.2 设 A 是 Banach 空间 X 中的增生算子, 若存在满足 $\mathrm{Re}\lambda<0$ 的 λ, 使得 $\mathcal{R}(A-\lambda I)=X$, 那么所有满足 $\mathrm{Re}\zeta<0$ 的 ζ 都属于 A 的预解集, 且有 $\|(A-\zeta I)^{-1}\|\leqslant 1/|\mathrm{Re}\,\zeta|$.

证明 显然 $A-\lambda I$ 是到上的. 设 $x\neq 0$, $f\in F(x)$, 则有

$$\begin{aligned}\|(A-\lambda I)x\|\cdot\|x\| &= \|(A-\lambda I)x\|\cdot\|f\|\geqslant|\langle f,\,(A-\lambda I)x\rangle|\\ &= |\langle f, Ax\rangle-\lambda\langle f, x\rangle|\geqslant\mathrm{Re}\langle Ax, f\rangle+|\mathrm{Re}\lambda|\cdot\|x\|^2.\end{aligned}$$

这表明, $A-\lambda I$ 是 1–1 的且 $\|(A-\lambda I)^{-1}\|\leqslant 1/|\mathrm{Re}\,\lambda|$. 于是 $\lambda\in\rho(A)$. 利用定理 2.1.10 和有限覆盖定理, 就可推知结论成立. 证毕.

定义 2.2.2 称 X 中的线性算子 A 是 m - 增生的, 如果

(1) A 是增生的;

(2) 对任意 $\lambda>0$ 以及 $y\in X$, 都存在 $x\in D(A)$, 使得 $x+\lambda Ax=y$.

根据定义 2.2.2 和 (2.4) 式知, 如果 A 在 X 中是 m- 增生的, 那么对任意 $y\in X$ 以及 $\lambda>0$, 方程 $x+\lambda Ax=y$ 存在唯一解 x. 因此, 由命题 2.1.7 知, $(-\infty,0)\subset\rho(A)$. 记这个解为 $J_\lambda y$ 或 $(I+\lambda A)^{-1}y$, 即 $x=J_\lambda y=(I+\lambda A)^{-1}y$. 此外还有 $\|x\|\leqslant\|y\|$, 即 $J_\lambda\in\mathcal{L}(X)$ 且 $\|J_\lambda\|_{\mathcal{L}(X)}\leqslant 1$. 利用定理 2.2.2 , 我们有

命题 2.2.3 设 A 是 X 中的增生算子, 则以下两个命题等价:

(1) A 是 m- 增生算子;

(2) 存在 $\lambda_0>0$, 使得对任意 $y\in X$, 方程 $x+\lambda_0 Ax=y$ 有解 $x\in D(A)$.

命题 2.2.4 如果 A 是 m- 增生的，那么 $G(A)$ 在 X 中是闭的.

证明 因为 $J_1 \in \mathcal{L}(X)$, $G(J_1)$ 是闭的，所以 $G(I+A)$ 是闭的，从而 $G(A)$ 是闭的. 证毕.

设 A 是 m- 增生算子. 对每一个 $x \in D(A)$, 定义**图范数**：$\|x\|_{D(A)} = \|x\|+\|Ax\|$. 那么 $(D(A), \|\cdot\|_{D(A)})$ 是 Banach 空间，且 $A \in \mathcal{L}(D(A), X)$. 以后就用 $D(A)$ 表示 Banach 空间 $(D(A), \|\cdot\|_{D(A)})$.

命题 2.2.5 设 A 是 m- 增生的，则对任意 $x \in \overline{D(A)}$, 有 $\lim\limits_{\lambda \searrow 0} \|J_\lambda x - x\| = 0$.

证明 首先，由 $\|J_\lambda\| \leqslant 1$ 知，$\|J_\lambda - I\| \leqslant 2$. 根据稠密性，我们只需讨论 $x \in D(A)$ 的情形. 因为

$$J_\lambda x - x = J_\lambda(x - (I+\lambda A)x),$$

所以当 $\lambda \to 0$ 时，有

$$\|J_\lambda x - x\| \leqslant 2\|x - (I+\lambda A)x\| = 2\lambda\|Ax\| \to 0.$$

证毕.

定义 2.2.3 设 A 是 m- 增生算子. 对 $\lambda > 0$, 定义算子 A_λ：

$$A_\lambda = AJ_\lambda = \frac{I - J_\lambda}{\lambda}.$$

显然，$A_\lambda \in \mathcal{L}(X)$, 且 $\|A_\lambda\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant 2/\lambda$.

命题 2.2.6 设 A 是稠定的 m- 增生算子，则当 $\lambda \searrow 0$ 时，$A_\lambda x \to Ax$ 对所有 $x \in D(A)$ 成立.

证明 任取 $x \in D(A)$. 由命题 2.2.5 知

$$J_\lambda Ax - Ax \to 0, \text{ 当} \lambda \searrow 0 \text{时}.$$

另一方面，由定义 2.2.3 易得

$$A_\lambda x = AJ_\lambda x = J_\lambda(I+\lambda A)AJ_\lambda x = J_\lambda A(I+\lambda A)J_\lambda x = J_\lambda Ax.$$

于是，当 $\lambda \searrow 0$ 时，有

$$\|A_\lambda x - Ax\| = \|J_\lambda Ax - Ax\| \to 0.$$

由 $x \in D(A)$ 的任意性知，结论成立. 证毕.

§2.3 延 拓

本节我们将证明, X 上的稠定 m- 增生算子 A 可以延拓成一个较大空间 $\bar{X}$ 上的 m- 增生算子 $\bar{A}$. 该结论对于发展方程弱解的特性的刻画非常重要.

定理 2.3.1 设 A 是 X 中的稠定的 m- 增生算子, 则存在一个较大的 Banach 空间 $\bar{X}$ 以及 $\bar{X}$ 上的 m- 增生算子 $\bar{A}$, 使得

(1) $X \hookrightarrow \bar{X}$, 并且这个嵌入是紧的;

(2) 对任意 $x \in X$, x 在 $\bar{X}$ 中的范数等价于 $\|J_1 x\|$;

(3) $D(\bar{A}) = X$;

(4) $\bar{A}x = Ax, \qquad \forall\, x \in D(A)$.

此外, 满足上述性质 (1)~(4) 的 Banach 空间 $\bar{X}$ 和算子 $\bar{A}$ 在同构意义下是唯一的.

证明 对于 $x \in X$, 定义 $|||x||| = \|J_1 x\|$. 显然 $|||\cdot|||$ 是 X 上的范数. 记 $\bar{X}$ 是 X 在范数 $|||\cdot|||$ 下的完备化空间. 那么 $\bar{X}$ 在同构意义下是唯一的, 且嵌入 $X \hookrightarrow \bar{X}$ 是紧的. 另一方面, 注意到

$$J_1 Ax = x - J_1 x, \qquad \forall\, x \in D(A),$$

所以

$$|||Ax||| \leqslant |||x||| + \|x\| \leqslant 2\|x\|, \qquad \forall\, x \in D(A).$$

于是, A 可以延拓成算子 $\hat{A} \in \mathcal{L}(X, \bar{X})$. 按如下方式定义 $\bar{X}$ 中的线性算子 $\bar{A}$:

$$D(\bar{A}) = X; \qquad \bar{A}x = \hat{A}x, \qquad \forall\, x \in D(\bar{A}).$$

显然 $\bar{A}$ 满足结论 (3) 和结论 (4) . 下面证明 $\bar{A}$ 是增生算子. 取 $\lambda > 0$, $x \in D(A)$, 并记 $y = J_1 x$. 则有

$$y + \lambda Ay = J_1(x + \lambda Ax).$$

由于算子 A 是增生的, 因此

$$|||x + \lambda Ax||| = \|y + \lambda Ay\| \geqslant \|y\| = |||x|||, \qquad \forall\, x \in D(A),\ \lambda > 0.$$

利用 $\hat{A}$ 的连续性可推出

$$|||x + \lambda \bar{A}x||| \geqslant |||x|||, \qquad \forall\, x \in X.$$

故算子 $\bar{A}$ 是增生的. 现在证明算子 $\bar{A}$ 是 m- 增生的. 假设 $f \in \bar{X}$, $\{f_n\} \subset X$, 在 $\bar{X}$ 中, $f_n \to f$ $(n \to \infty)$. 记 $x_n = J_1 f_n$. 因为 $\{f_n\}$ 是 $\bar{X}$ 中的 Cauchy 列, 所以 $\{x_n\}$ 也是 X 中的 Cauchy 列, 从而存在 $x \in X$, 使得在 X 中, $x_n \to x$. 利用

$$f_n = x_n + Ax_n = x_n + \hat{A}x_n$$

以及 $\hat{A} \in \mathcal{L}(X, \bar{X})$ 知, $f = x + \hat{A}x = x + \bar{A}x$. 故 $\bar{A}$ 是 m- 增生算子. $\bar{A}$ 的唯一性可由 $\hat{A}$ 的唯一性推出. 证毕.

推论 2.3.2 假设定理 2.3.1 的条件成立. 如果 $x \in X$ 满足 $\bar{A}x \in X$, 那么 $x \in D(A)$, 且 $Ax = \bar{A}x$.

证明 记 $f = x + \bar{A}x \in X$. 因为 A 是 m- 增生的, 所以存在 $y \in D(A)$, 使得 $y + Ay = f$. 从而由定理 2.3.1 的结论 (4) 知, $(x-y) + \bar{A}(x-y) = 0$. 于是, 由 $\bar{A}$ 是增生的就可以推出 $x = y$. 证毕.

§2.4 Hilbert 空间中的线性算子

假设 H 是 Hilbert 空间, A 是 H 中的线性算子 (当 H 是复 Hilbert 空间时, A 是 H 中的 $\mathbb{C}$- 线性算子). 如果 H 是实 Hilbert 空间, 就用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 H 中的实内积. 如果 H 是复 Hilbert 空间, 那么存在一个连续的共轭双线性映射 $b: H \times H \to \mathbb{C}$, 满足

$$\begin{aligned}
&b(\mathrm{i}u, v) = \mathrm{i}b(u, v), && \forall\, u, v \in H,\\
&b(u, v) = \overline{b(u, v)}, && \forall\, u, v \in H,\\
&b(u, u) = \|u\|^2, && \forall\, u \in H.
\end{aligned}$$

由此知, $\langle\cdot,\cdot\rangle := \mathrm{Re}(b(u, v))$ 是 H 中的实内积. 下面, 无论 H 是实 Hilbert 空间还是复 Hilbert 空间, 我们总用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 H 中的实内积.

定理 2.4.1 设 A 是 H 中的稠定线性算子, 则 $\left[\overline{R(A)}\right]^{\perp} = \{y \in D(A^*) : A^*y = 0\}$.

证明 因为 $\overline{D(A)} = H$, 所以

$$\begin{aligned}
y \in \left[\overline{\mathcal{R}(A)}\right]^{\perp} &\iff \langle y, Ax\rangle = 0, \qquad \forall x \in D(A)\\
&\iff y \in D(A^*) \text{ 且 } \langle A^*y, x\rangle = 0, \qquad \forall x \in D(A)\\
&\iff y \in D(A^*) \text{ 且 } A^*y = 0.
\end{aligned}$$

证毕.

定理 2.4.2 线性算子 A 在 H 中是增生的当且仅当

$$\langle Ax,\, x\rangle \geqslant 0, \qquad \forall\, x \in D(A). \tag{2.5}$$

证明 假设 A 是增生的，则有

$$2\lambda\langle Ax,\, x\rangle + \lambda^2\|Ax\|^2 = \|x+\lambda Ax\|^2 - \|x\|^2 \geqslant 0, \qquad \forall\, \lambda > 0,\, x \in D(A).$$

在上述不等式两边同除以 λ, 并令 $\lambda \searrow 0$, 就得到

$$\langle Ax,\, x\rangle \geqslant 0, \qquad \forall\, x \in D(A).$$

反之，假设 (2.5) 式成立，那么对任意 $\lambda > 0$ 和 $x \in D(A)$, 有

$$\|x+\lambda Ax\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda\langle Ax,\, x\rangle + \lambda^2\|Ax\|^2 \geqslant \|x\|^2,$$

因此 A 是增生算子. 证毕.

推论 2.4.3 若 A 是 H 中的 m- 增生算子，则 $D(A)$ 在 H 中稠密.

证明 设 $z \in (D(A))^{\perp}$, $x = J_1 z \in D(A)$, 则有

$$0 = \langle z, x\rangle = \langle x + Ax, x\rangle.$$

因此，由定理 2.4.2 知

$$\|x\|^2 = -\langle Ax, x\rangle \leqslant 0.$$

由此推出 $x = z = 0$, 故 $D(A)$ 在 H 中稠. 证毕.

推论 2.4.4 设 A 是 H 中的 m- 增生算子. 则当 $\lambda \searrow 0$ 时，有

$$J_\lambda x \longrightarrow x, \qquad \forall\, x \in H,$$

$$A_\lambda x \longrightarrow Ax, \qquad \forall\, x \in D(A).$$

证明 利用推论 2.4.3 和命题 2.2.5 以及命题 2.2.6 可得结论.

定理 2.4.5 设 A 是 H 中的稠定增生算子. 那么 A 是 m- 增生的当且仅当 A^* 是增生的且 $G(A)$ 是闭的.

证明 假设 A 是 m- 增生算子. 由命题 2.2.4 知， $G(A)$ 是闭的. 再证明 A^* 是增生算子. 对于 $\lambda > 0$ 和 $y \in D(A^*)$, 注意到 $\|J_\lambda\| \leqslant 1$, 我们有

$$\begin{aligned}\langle A^*y,\, J_\lambda y\rangle &= \langle y,\, AJ_\lambda y\rangle = \langle y,\, A_\lambda y\rangle \\ &= \frac{1}{\lambda}\langle y,\, y - J_\lambda y\rangle = \frac{1}{\lambda}\{\|y\|^2 - \langle y,\, J_\lambda y\rangle\} \geqslant 0.\end{aligned}$$

因为当 $\lambda \searrow 0$ 时, $\langle A^*y, J_\lambda y\rangle \to \langle A^*y, y\rangle$, 所以 A^* 是增生算子.

反之，假设 A^* 是增生算子且 $G(A)$ 是闭的. 显然 $\mathcal{R}(I+A)$ 在 H 中是闭的. 从而利用定理 2.4.1 以及 A^* 是增生算子，就可以得到

$$\left[\overline{\mathcal{R}(I+A)}\right]^{\perp} = \{y \in D(A^*):\ y + A^*y = 0\} = \{0\}.$$

于是 $\mathcal{R}(I+A) = H$. 故由命题 2.2.3 知， A 是 m- 增生算子. 证毕.

推论 2.4.6 设 A 是自共轭算子, 并且 $A \geqslant 0$, 即对任意 $x \in D(A)$ 有 $\langle Ax, x\rangle \geqslant 0$. 那么 A 是 m- 增生算子.

证明 由定理 2.4.2 知， A 是增生算子. 因为 $A^* = A$, 所以 A^* 也是增生算子. 又因为 $G(A^*)$ 是闭的，所以 $G(A)$ 当然是闭的. 因此，由定理 2.4.5 知，结论成立. 证毕.

推论 2.4.7 如果 A 是 H 中的斜共轭算子，那么 A 和 $-A$ 都是 m- 增生算子.

证明 设 $x \in D(A)$, 则 $\langle Ax,x\rangle = \langle x, A^*x\rangle = -\langle x, Ax\rangle$. 因此 $\langle Ax,x\rangle = 0$. 根据定理 2.4.2 知， A 和 $-A$ 都是增生算子. 余下的证明类似于推论 2.4.6 . 证毕.

推论 2.4.8 设 A 是 H 中的稠定线性算子，满足 $G(A) \subset G(A^*)$ 且 $A \geqslant 0$. 那么， A 是 m- 增生算子当且仅当 A 是自共轭算子.

证明 根据推论 2.4.6, 只需证明： A 是 m- 增生算子蕴涵 A 是自共轭算子. 设 $(x,f) \in G(A^*)$, $g = x + A^*x = x + f$. 因为 A 是 m- 增生算子，所以存在 $y \in D(A)$, 使得 $g = y + Ay$. 再由 $G(A) \subset G(A^*)$ 知， $y \in D(A^*)$ 且 $g = y + A^*y$. 于是, $(y-x) + A^*(y-x) = 0$. 又因为 A^* 是增生算子 (定理 2.4.5) ，所以 $x = y$, $Ay = f$. 因此 $(x,f) \in G(A)$, 从而 $A = A^*$. 证毕.

推论 2.4.9 设 A 是 H 中的稠定线性算子. 那么 A 和 $-A$ 都是 m- 增生算子当且仅当 A 是斜共轭算子.

证明 根据推论 2.4.7, 只需证明： A 和 $-A$ 都是 m- 增生算子蕴涵 A 是斜共轭算子. 事实上，对 A 和 $-A$ 利用定理 2.4.2, 可得

$$\langle Ax, x\rangle = 0, \qquad \forall\, x \in D(A).$$

由于对任意 $x, y \in D(A)$, 有

$$\langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle = \langle A(x+y), x+y\rangle - \langle Ax, x\rangle - \langle Ay, y\rangle = 0,$$

因此 $G(-A) \subset G(A^*)$. 接下来证明 $G(A^*) \subset G(-A)$. 设 $(x,f) \in G(A^*)$, 记 $g = x - A^*x = x - f$. 因为 A 是 m- 增生算子，所以存在 $y \in D(A)$, 使得 $g = y + Ay$. 由

$G(-A) \subset G(A^*)$ 知， $y \in D(A^*)$ 且 $-Ay = A^*y$. 因此 $(y-x) - A^*(y-x) = 0$. 又因为 $-A^*$ 是增生算子 (定理 2.4.5) ，所以 $x = y$. 于是， $(x, f) \in G(-A)$. 故 $-A = A^*$. 证毕.

定理 2.4.10 A 是 H 中的 m- 增生算子的充要条件是，每一个满足 $\mathrm{Re}\zeta < 0$ 的 ζ 都属于 A 的预解集并且成立

$$\|(A - \zeta I)^{-1}\| \leqslant 1/|\mathrm{Re}\zeta|.$$

证明 如果 A 是 m- 增生算子，那么由定理 2.2.2 知，结论成立.

反之,假定 $(-\infty, 0) \subset \rho(A)$, 并且 $\|(A+\alpha I)^{-1}\| \leqslant 1/\alpha$ 对所有 $\alpha > 0$ 成立. 显然, 对任意 $y \in X$, 方程 $x + Ax = y$ 有解 $x \in D(A)$, 于是 $\|x\| = \|(A+\alpha I)^{-1}(Ax+\alpha x)\| \leqslant \alpha^{-1}\|Ax + \alpha x\|$, 即

$$\alpha^2\|x\|^2 \leqslant \|Ax\|^2 + 2\alpha\langle Ax, x\rangle + \alpha^2\|x\|^2.$$

由此可得 $2\langle Ax, x\rangle \geqslant -\|Ax\|^2/\alpha$. 令 $\alpha \to \infty$, 便推出 $\langle Ax, x\rangle \geqslant 0$. 这说明 A 是增生算子 (定理 2.4.2) . 再由 $(-\infty, 0) \subset \rho(A)$ 知， A 是 m- 增生算子. 证毕.

接下来，我们讨论 Hilbert 空间 H 中的自共轭算子的谱. 首先回顾以下事实：如果 S 是 H 中的线性对称算子，那么就有

(1) $\langle Sx, x\rangle \in \mathbb{R}, \quad \forall\, x \in D(S)$;

(2) S 的特征值都是实的；

(3) 对应于不同特征值的特征向量都正交；

(4) 若 H 是复 Hilbert 空间，且 $\lambda = \lambda_r + \mathrm{i}\lambda_i$, 其中 $\lambda_r, \lambda_i \in \mathbb{R}$, 则

$$\|(S - \lambda I)x\|^2 = \|(S - \lambda_r I)x\|^2 + \lambda_i^2\|x\|^2, \qquad x \in D(S). \tag{2.6}$$

定理 2.4.11 对自共轭算子 A, 成立 $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

证明 设 H 是复 Hilbert 空间， $\lambda = \lambda_r + \mathrm{i}\lambda_i$, $\lambda_i \neq 0$. 等式 (2.6) 说明，对 $x \in D(A)$ 有 $\|(A - \lambda I)x\| \geqslant |\lambda_i| \cdot \|x\|$. 从而 $A - \lambda I$ 是 1–1 的. 算子 A 是闭的蕴涵 $\mathcal{R}(A - \lambda I)$ 也是闭的. 如果 $y \in [\mathcal{R}(A - \lambda I)]^\perp$, 那么对任意 $x \in D(A)$, 均成立 $\langle Ax, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle x, \bar{\lambda} y\rangle$. 由此推出， $A^*y = \bar{\lambda}y$. 因为 A^* 是对称的，即 A^* 只有实特征值，所以 $y = 0$, 从而 $\mathcal{R}(A - \lambda I) = H$. 于是，映射 $A - \lambda I$ 是 1–1 的、到上的. 从而由命题 2.1.7 知， $\lambda \in \rho(A)$. 证毕.

定理 2.4.12 设 $H \neq \{0\}$ 是 Hilbert 空间， $A \in \mathcal{L}(H)$ 是对称算子. 那么存在 $\lambda \in \sigma(A)$, 使得 $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle| = |\lambda|$.

证明 显然, $m := \sup\limits_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle| \leqslant \|A\|$. 下证 $\|A\| \leqslant m$. 注意到对任意 $x, y \in H$, 有

$$\begin{aligned}2\langle Ax, y\rangle + 2\langle Ay, x\rangle &= \langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle \\ &\leqslant m(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) \\ &= 2m(\|x\|^2 + \|y\|^2),\end{aligned}$$

因此当 $Ax \neq 0$ 且 $y = (\|x\|/\|Ax\|)Ax$ 时, 就有

$$2\|x\| \cdot \|Ax\| = \langle Ax, y\rangle + \langle y, Ax\rangle = \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle \leqslant m(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 2m\|x\|^2.$$

于是 $\|Ax\| \leqslant m\|x\|$. 当 $Ax = 0$ 时, 上述不等式显然成立. 故 $\|A\| = m$.

选取 $x_n \in H$, 使得 $\|x_n\| = 1$ 且 $\|A\| = \lim\limits_{n\to\infty} |\langle Ax_n, x_n\rangle|$. 不妨假设 $\langle Ax_n, x_n\rangle$ 收敛到某个实数 λ, 从而 $|\lambda| = \|A\|$. 注意到

$$\begin{aligned}\|(A-\lambda I)x_n\|^2 &= \|Ax_n\|^2 - 2\lambda\langle Ax_n, x_n\rangle + \lambda^2\|x_n\|^2 \\ &\leqslant 2\lambda^2 - 2\lambda\langle Ax_n, x_n\rangle \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

我们不难看出, 如果 $\lambda \notin \sigma(A)$, 则有

$$1 = \|x_n\| = \|(A-\lambda I)^{-1}(A-\lambda I)x_n\| \leqslant \|(A-\lambda I)^{-1}\| \cdot \|(A-\lambda I)x_n\| \longrightarrow 0.$$

这是一个矛盾. 故 $\lambda \in \sigma(A)$. 结论得证.

定理 2.4.13 如果 A 是 Hilbert 空间 $H \neq \{0\}$ 中的自共轭算子, 那么它的谱集非空, 并且 $\|(A-\lambda I)^{-1}\| = \{\mathrm{dist}(\lambda, \sigma(A))\}^{-1}$ 对所有 $\lambda \in \rho(A)$ 成立.

证明 由定理 2.4.11 和定理 2.4.12 知, $\sigma(A)$ 非空并且 $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. 设 $\lambda = \lambda_r + \mathrm{i}\lambda_i \in \rho(A)$. 如果 $\lambda_r \in \sigma(A)$, 那么由 (2.6) 式得 $\|(A-\lambda I)^{-1}\| \leqslant 1/|\lambda_i| \leqslant \{\mathrm{dist}\,(\lambda, \sigma(A))\}^{-1}$.

下面考虑 $\lambda_r \in \rho(A)$ 的情形. 任取 $\delta > 0$, 使得 $(\lambda_r - \delta, \lambda_r + \delta) \subset \rho(A)$. 设 $\xi \in \mathbb{R}$ 满足 $|\xi| > 1/\delta$. 因为

$$[(A-\lambda_r I)^{-1} - \xi I]^{-1} = \xi^{-1}(A-\lambda_r I)(\xi^{-1}I + \lambda_r I - A)^{-1},$$

所以 $\xi \in \rho((A-\lambda_r I)^{-1})$. 因此, $\sigma((A-\lambda_r I)^{-1}) \subset [-1/\delta, 1/\delta]$. 于是由定理 2.4.12 知

$$\|(A-\lambda_r I)^{-1}\| \leqslant 1/\delta. \tag{2.7}$$

由于 $(A-\lambda_r I)(A-\lambda_r I)^{-1}=I$, $H\neq\{0\}$, 因此 $\|(A-\lambda_r I)^{-1}\|\neq 0$. 取满足 $(\lambda_r-\delta,\lambda_r+\delta)\subset\rho(A)$ 的最大 δ, 那么, 或者 $\lambda_r+\delta\in\sigma(A)$ 或者 $\lambda_r-\delta\in\sigma(A)$, 并且 $\{\operatorname{dist}(\lambda,\sigma(A))\}^2\leqslant\delta^2+\lambda_i^2$. 估计式 (2.7) 说明, $\|(A-\lambda_r I)x\|\geqslant\delta\|x\|$ 对所有 $x\in D(A)$ 成立. 从而由 (2.6) 式得 $\|(A-\lambda I)x\|^2\geqslant(\delta^2+\lambda_i^2)\|x\|^2$. 于是 $\|(A-\lambda I)^{-1}\|\leqslant\{\operatorname{dist}(\lambda,\sigma(A))\}^{-1}$.

反向不等式 $\|(A-\lambda I)^{-1}\|\geqslant\{\operatorname{dist}(\lambda,\sigma(A))\}^{-1}$ 可由定理 2.1.10 直接推出. 证毕.

定理 2.4.14 设 A 是自共轭算子, $\lambda\in\mathbb{R}$. 则 $(-\infty,\lambda)\subset\rho(A)$ 当且仅当

$$\langle Ax,x\rangle\geqslant\lambda\|x\|^2,\qquad\forall\,x\in D(A),$$

即 $A-\lambda I\geqslant 0$.

证明 假设 $(-\infty,\lambda)\subset\rho(A)$, 则由定理 2.4.11 和定理 2.4.13 知

$$\|(A-\lambda I-\xi I)^{-1}\|\leqslant 1/|\operatorname{Re}\xi|,\qquad\forall\,\xi\in\mathbb{K},\ \operatorname{Re}\xi<0.$$

根据定理 2.4.10, $A-\lambda I$ 是 m- 增生算子. 再利用定理 2.4.2 知, $A-\lambda I\geqslant 0$.

反之, 假设 $A-\lambda I\geqslant 0$. 任取 $\xi\in(-\infty,\lambda)$. 注意到

$$(\lambda-\xi)\|x\|^2\leqslant\langle(A-\xi)x,x\rangle\leqslant\|(A-\xi)x\|\cdot\|x\|,\qquad\forall x\in D(A),$$

所以 $A-\xi I$ 是 1–1 的. 接下来, 证明 $A-\xi I$ 是到上的. 由于 A 是闭的, 易证 $\mathcal{R}(A-\xi I)$ 也是闭的. 设 $y\in[\mathcal{R}(A-\xi I)]^{\perp}$, 则 $\langle Ax,y\rangle=\langle x,\xi y\rangle$ 对所有 $x\in D(A)$ 成立. 利用 A 的自共轭性质又推出, $Ay=\xi y$. 因为已证 $A-\xi I$ 是 1–1 的, 所以 $y=0$, 于是 $\mathcal{R}(A-\xi I)=H$. 再由命题 2.1.7 知, $\xi\in\rho(A)$. 根据 ξ 的任意性即知, $(-\infty,\lambda)\subset\rho(A)$. 证毕.

最后, 对于复 Hilbert 空间 H 而言, 如果 A 是 H 中的 $\mathbb{C}$- 线性算子, 由 $(\mathrm{i}A)x=A(\mathrm{i}x)$ 就定义了 H 中的一个线性算子 $\mathrm{i}A$.

定理 2.4.15 设 H 是复 Hilbert 空间, A 是 H 中的 $\mathbb{C}$- 线性算子并且 $D(A)$ 在 H 中稠. 那么 A^* 是 $\mathbb{C}$- 线性的, 且有 $(\mathrm{i}A)^*=-\mathrm{i}A^*$.

证明 设 $y\in D(A^*)$, $f=A^*y$, $z\in\mathbb{C}$. 对任意 $x\in D(A)$, 有

$$\langle zf,x\rangle=\langle f,\bar{z}x\rangle=\langle y,A(\bar{z}x)\rangle=\langle y,\bar{z}Ax\rangle=\langle zy,Ax\rangle.$$

于是, $zy\in D(A^*)$ 且 $zf=A^*(zy)$. 因此 A^* 是 $\mathbb{C}$- 线性的. 下证 $(\mathrm{i}A)^*=-\mathrm{i}A^*$. 因为

$$\langle-\mathrm{i}A^*y,x\rangle=\langle y,A(\mathrm{i}x)\rangle=\langle y,\mathrm{i}Ax\rangle,\qquad\forall\,y\in D(A^*),\ x\in D(A),$$

所以 $D(-\mathrm{i}A^*) = D(A^*) \subset D((\mathrm{i}A)^*)$, 并且对任意的 $y \in D(A^*)$, 有 $-\mathrm{i}A^*y = (\mathrm{i}A)^*y$. 把该结论应用于 $\mathrm{i}A$, 就得到

$$D(-\mathrm{i}(\mathrm{i}A)^*) = D((\mathrm{i}A)^*) \subset D((\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}A)^*) = D((-A)^*) = D(-A^*) = D(-\mathrm{i}A^*).$$

故 $D(-\mathrm{i}A^*) = D((\mathrm{i}A)^*)$, 且 $(\mathrm{i}A)^* = -\mathrm{i}A^*$. 证毕.

推论 2.4.16 如果 A 是自共轭算子，那么 $\mathrm{i}A$ 是斜共轭算子.

§2.5 偏微分方程理论中的一些例子

先叙述 Lax-Milgram 定理.

定理 2.5.1 (Lax-Milgram 定理) 设 H 是 Hilbert 空间， $a: H\times H \to \mathbb{R}$ 是双线性函数，即 $a(u,v)$ 关于 u 和 v 都是线性的. 如果存在常数 C 与 $\alpha>0$, 使得

(1) $|a(u,v)| \leqslant C\|u\|\cdot\|v\|$ 对所有 $(u,v)\in H\times H$ 成立 (连续性)；

(2) $a(u,u) \geqslant \alpha\|u\|^2$ 对所有 $u\in H$ 成立 (强制性).

那么, 对每一个 $f\in H^*$(H 的对偶空间), 都存在唯一的 $u\in H$, 使得 $a(u,v)=\langle f,v\rangle$ 对所有 $v\in H$ 成立.

2.5.1 $\mathbb{R}^N$ 中的开集上的 Laplace 算子: L^2 理论

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是开集， $Y=L^2(\Omega)$. 定义 Y 中的线性算子 B：

$$\begin{cases} D(B) = \{u\in H_0^1(\Omega):\ \Delta u\in L^2(\Omega)\}, \\ Bu = -\Delta u, \quad \forall\, u\in D(B). \end{cases}$$

定理 2.5.2 B 是稠定的 m- 增生算子. 确切地说，B 是自共轭算子并且 $B\geqslant 0$.

我们先证下面的引理.

引理 2.5.3 (散度公式)

$$\int_\Omega v\Delta u\mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x, \qquad \forall\, u\in D(B),\ v\in H_0^1(\Omega). \tag{2.8}$$

证明 当 $v\in\mathcal{D}(\Omega)$ 时，(2.8) 式显然成立. 因为 (2.8) 式的两端关于 $v\in H_0^1(\Omega)$ 连续，所以利用稠密性可知，结论对 $v\in H_0^1(\Omega)$ 成立.

定理 2.5.2 的证明 因为 $\mathcal{D}(\Omega)\subset D(B)$, 所以 $D(B)$ 在 Y 中稠，即 B 是稠定的. 下证 B 是增生算子. 任取 $u\in D(B)$. 在 (2.8) 式中令 $v=u$, 就得到 $\langle Bu,u\rangle\geqslant 0$. 从而由定理 2.4.2 知， B 是增生算子. 接下来说明 B 是 m- 增生算子. 因为双线性

连续映射

$$b(u,v)=\int_\Omega(uv+\nabla u\cdot\nabla v)\mathrm{d}x$$

在 $H_0^1(\Omega)$ 中是强制的，所以由定理 2.5.1 知，对任意 $f\in L^2(\Omega)$, 都存在 $u\in H_0^1(\Omega)$, 使得

$$\int_\Omega(uv+\nabla u\cdot\nabla v)\mathrm{d}x=\int_\Omega fv\mathrm{d}x,\qquad \forall\, v\in H_0^1(\Omega).$$

于是在广义函数的意义下，有

$$u-\Delta u=f.$$

另外，根据 $u\in H_0^1(\Omega)$ 推知， $u\in D(B)$ 且 $u+Bu=f$. 再利用命题 2.2.3 知， B 是 m- 增生算子. 现在只需说明 B 是自共轭算子. 由 (2.8) 式知，对任意 $u,v\in D(B)$, 有

$$\langle Bu,v\rangle=\langle u,Bv\rangle.$$

所以 $G(B)\subset G(B^*)$. 于是由推论 2.4.8 知， B 是自共轭算子.

注 2.5.1 如果边界 $\partial\Omega$ 属于 C^2 且有界，那么在等价范数的意义下，有 $D(B)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ (可参阅文献 [4] 中的定理 IX.25 ，或者文献 [7] 中的定理 17.2) .

2.5.2 $\mathbb{R}^N$ 中的开集上的 Laplace 算子：C_0 理论

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是有界开集， $Z=L^\infty(\Omega)$. 定义 Z 中的线性算子 C ：

$$\begin{cases} D(C)=\{u\in H_0^1(\Omega)\cap Z:\ \Delta u\in Z\},\\ Cu=-\Delta u,\qquad \forall\ u\in D(C).\end{cases}$$

定理 2.5.4 在 Z 上， C 是 m- 增生算子.

证明 首先证明 C 是增生算子. 设 $\lambda>0$, $f\in Z$ 并记 $M=\|f\|_\infty$. 取 $u\in H_0^1(\Omega)$ 是方程

$$u-\lambda\Delta u=f$$

在 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 中的解. 当然，在 $L^2(\Omega)$ 中 u 也满足这个方程. 于是，在 $L^2(\Omega)$ 中

$$(u-M)-\lambda\Delta(u-M)=f-M.$$

又因为 $v=(u-M)^+\in H_0^1(\Omega)$ 且 $\nabla v=\chi_{\{u>M\}}\nabla u$ (见推论 1.1.6), 所以利用引理 2.5.3 便得

$$\int_\Omega v^2\mathrm{d}x+\lambda\int_{\{u>M\}}|\nabla u|^2\mathrm{d}x=\int_\Omega(f-M)v\mathrm{d}x\leqslant 0.$$

因此, $\int_\Omega v^2 \mathrm{d}x \leqslant 0$, 从而 $v \equiv 0$. 故 $u \leqslant M$ 在 Ω 上几乎处处成立. 类似可证, $u \geqslant -M$ 在 Ω 上几乎处处成立. 所以, $u \in L^\infty(\Omega)$, 且 $\|u\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty = \|u+\lambda Cu\|_\infty$. 从而由命题 2.2.1 知, C 是增生算子. 下面证明 C 是 m- 增生算子. 任取 $f \in L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. 从定理 2.5.2 的证明过程知, 方程 $u - \Delta u = f$ 有解 $u \in H_0^1(\Omega)$, 并且满足 $\Delta u \in L^2(\Omega)$. 同上, $u \in L^\infty(\Omega)$, 因此 $u \in D(C)$, 且 $u + Cu = f$. 故由命题 2.2.3 知, C 是 m- 增生算子. 证毕.

引理 2.5.5 如果边界 $\partial\Omega$ 是 Lipschitz 连续的, 则

$$D(C) \subset C_0(\Omega) = \{ u \in C(\bar{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0 \}.$$

证明 这个引理的证明比较复杂, 要用到闸函数的概念. 在此我们略去证明. 有兴趣的读者可以参阅文献 [8] 的定理 8.30.

根据引理 2.5.5 不难推知, 在一般情况下, 算子 C 的定义域在 Z 中不是稠的. 然而, 定义域稠密与否至关重要. 我们不妨再考察一个例子. 记 $X = C_0(\Omega)$, 定义算子 A :

$$\begin{cases} D(A) = \{u \in X \cap H_0^1(\Omega) : \ \Delta u \in X\}, \\ Au = -\Delta u, \qquad \forall u \in D(A). \end{cases}$$

定理 2.5.6 如果边界 $\partial\Omega$ 是 Lipschitz 连续的, 那么 A 是稠定的 m- 增生算子.

证明 由于 $\mathcal{D}(\Omega)$ 在 X 中是稠的, 且 $\mathcal{D}(\Omega) \subset D(A)$, 因而 A 是稠定的. 因为 X 中的范数与 $L^\infty(\Omega)$ 中的范数等价, 所以, $X \hookrightarrow Z$ 且 $G(A) \subset G(C)$. 算子 C 是增生算子说明算子 A 也是增生算子. 接下来说明, A 是 m- 增生算子. 任取 $f \in X \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$. 因为 C 是 m- 增生算子, 所以存在 $u \in D(C)$, 使得 $u - \Delta u = f$. 于是由引理 2.5.5 得 $u \in X$, 从而 $\Delta u \in X$. 故 $u \in D(A)$ 且 $u + Au = f$. 因此由命题 2.2.3 知, A 是 m- 增生算子.

注 2.5.2 在 2.5.1 节和 2.5.2 节的三个例子中, 对同一个表达式 (负 Laplace 算子 $-\Delta$) , 如果选取的工作空间不同, 那么它们就分别对应着具有不同性质的算子. 因此, 只有在取定了算子 Δ 的工作空间之后, 它才具有确切的意义.

2.5.3 $\mathbb{R}^N$ 中的 Laplace 算子: L^∞ 理论

记 $Z = L^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$C_\ell=\{f:\ f\in C(\mathbb{R}^N),\ \lim_{|x|\to\infty}f(x)\ \text{存在}\},$$
$$C_{\ell 0}=\{f:\ f\in C(\mathbb{R}^N),\ \lim_{|x|\to\infty}f(x)=0\}.$$

首先考察空间 $C_{\ell 0}$. 假设 $f_1, f_2, \cdots\in\mathcal{S}$ 满足 $f_n\xrightarrow{C_{\ell 0}}f$, $\Delta f_n\xrightarrow{C_{\ell 0}}g, n\to\infty$. 则有

$$\int_{\mathbb{R}^N}g\varphi\mathrm{d}x\longleftarrow\int_{\mathbb{R}^N}\varphi\Delta f_n\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^N}f_n\Delta\varphi\mathrm{d}x\longrightarrow\int_{\mathbb{R}^N}f\Delta\varphi\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^N}\varphi\Delta f\mathrm{d}x,\quad\forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

从而 $g=\Delta f$. 这说明，定义在 $D(\Delta)=\mathcal{S}\subset C_{\ell 0}$ 上的算子 Δ 是可闭的. 记 $\bar{\Delta}$ 是 Δ 的闭包，那么 $D(\bar{\Delta})=W_0^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$, 并且对 $u\in D(\Delta)$, 有 $\bar{\Delta}u=\Delta u$.

引理 2.5.7 设 $f\in\mathcal{S}$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$, 则存在唯一的 $u\in\mathcal{S}$, 使得

$$\lambda u-\Delta u=f,\qquad x\in\mathbb{R}^N. \tag{2.9}$$

此外还有

$$u(x)=G_\lambda * f=\int_{\mathbb{R}^N}G_\lambda(x-y)f(y)\mathrm{d}y, \tag{2.10}$$

这里的 $G_\lambda(\xi)$ 是 Green 函数，其定义为

$$G_\lambda(\xi)=(4\pi)^{-N/2}\mu^{(N-2)/2}\int_0^\infty s^{-N/2}\mathrm{e}^{-\mu s-\mu|\xi|^2/(4s)}\mathrm{d}s, \tag{2.11}$$

其中 $\mu=\sqrt{\lambda}$, $\mathrm{Re}\,\mu>0$.

证明 对 (2.9) 式作 Fourier 变换，可得 $\hat{u}(\xi)=(\lambda+|\xi|^2)^{-1}\hat{f}(\xi)$. 由此推出关于 u 的一个精确表示式为

$$\begin{aligned}u(x)&=(2\pi)^{-N/2}\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}(\lambda+|\xi|^2)^{-1}\hat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi\\&=(2\pi)^{-N/2}\mu^{-1}\int_{\mathbb{R}^N}(\mu+|\xi|^2/\mu)^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\hat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi\quad(\mu=\sqrt{\lambda},\ \mathrm{Re}\,\mu>0)\\&=(2\pi)^{-N/2}\mu^{-1}\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{e}^{-s\mu-s|\xi|^2/\mu}\hat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

利用 Fourier 变换的性质，并经直接计算，便有

$$\begin{aligned}u(x)&=(2\pi)^{-N/2}\mu^{-1}\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{e}^{-s\mu-s|\xi|^2/\mu}\right)^\wedge f(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s\\&=(4\pi)^{-N/2}\mu^{(N-2)/2}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}s^{-N/2}\mathrm{e}^{-s\mu-\mu|x-\xi|^2/(4s)}f(\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\\&=\int_{\mathbb{R}^N}G_\lambda(x-\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

其中 G_λ 由 (2.11) 式给出. 证毕.

由 (2.11) 式推出

$$\|G_\lambda\|_1 \leqslant \frac{1}{|\lambda|\left(\cos\frac{\arg\lambda}{2}\right)^{1+N/2}}, \qquad |\arg\lambda| < \pi. \tag{2.12}$$

特别地, 当 $\lambda > 0$ 时, (2.11) 式可以简化为

$$G_\lambda(\xi) = (4\pi)^{-N/2}\int_0^\infty s^{-N/2}\mathrm{e}^{-s\lambda-|\xi|^2/(4s)}\mathrm{d}s, \qquad \|G_\lambda\|_1 = \frac{1}{\lambda}. \tag{2.13}$$

引理 2.5.8 (Young 不等式) 设 $p, q, r \in [1, \infty]$ 满足 $1/p + 1 = 1/q + 1/r$. 若 $f \in L^q(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^r(\mathbb{R}^N)$, 则卷积 $f * g$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中几乎处处存在, 并且成立

$$\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_q \|g\|_r.$$

证明 当 $p = \infty$ 时, 直接利用 Hölder 不等式即得结论. 当 $p < \infty$ 时, 注意到 $r \leqslant p$ 且 $q \leqslant p$, 我们可定义

$$u(x,y) = |f(x-y)|^{q/p}|g(y)|^{r/p}, \qquad v(x,y) = |f(x-y)|^{1-q/p}|g(y)|^{1-r/p}.$$

由 Hölder 不等式得

$$\|v(x,\cdot)\|_{p'} \leqslant \|f\|_q^{1-q/p}\|g\|_r^{1-r/p},$$

其中 p' 满足 $1/p' + 1/p = 1$. 易见, $u^p(\cdot,y) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ 对几乎所有的 $y \in \mathbb{R}^N$ 成立, 并且

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} u^p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|f(x-y)|^q|g(y)|^r\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \|f\|_q^q\|g\|_r^r.$$

于是

$$\int_{\mathbb{R}^N}|f(x-y)g(y)|\mathrm{d}y \leqslant \|v(x,\cdot)\|_{p'}\|u(x,\cdot)\|_p,$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N}|f(x-y)g(y)|\mathrm{d}y\right)^p \leqslant \|f\|_q^{p-q}\|g\|_r^{p-r}\int_{\mathbb{R}^N}u^p(x,y)\mathrm{d}y.$$

因此

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|f(x-y)g(y)|\mathrm{d}y\right)^p\mathrm{d}x \leqslant \|f\|_q^p\|g\|_r^p.$$

引理 2.5.9 $\sigma(\bar{\Delta}) \subset (-\infty, 0]$, 并且

$$(\lambda I - \bar{\Delta})^{-1}f = G_\lambda * f \tag{2.14}$$

对 $f \in C_{\ell 0}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 成立，其中 G_λ 由 (2.11) 式给出.

证明 设 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. 对于 $u \in D(\bar{\Delta})$, 存在 $u_n \in \mathcal{S}$, 使得 $u_n \xrightarrow{C_{\ell 0}} u$, $\Delta u_n \xrightarrow{C_{\ell 0}} \bar{\Delta} u$. 从而 $\lambda u_n - \Delta u_n \xrightarrow{C_{\ell 0}} \lambda u - \bar{\Delta} u$. 利用 Young 不等式和 (2.12) 式推知

$$u \xleftarrow{C_{\ell 0}} u_n = G_\lambda * (\lambda u_n - \Delta u_n) \xrightarrow{C_{\ell 0}} G_\lambda * (\lambda u - \bar{\Delta} u).$$

于是， $u = G_\lambda * (\lambda u - \bar{\Delta} u)$. 这说明，通过卷积 $G_\lambda * f := R(\lambda) f$ 所定义的算子 $R(\lambda)$ 是 $\lambda I - \bar{\Delta}$ 的逆算子. 因此， $\lambda \notin \sigma(\bar{\Delta})$. 从而 $\sigma(\bar{\Delta}) \subset (-\infty, 0]$.

假设 $f \in C_{\ell 0}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. 则存在 $f_n \in \mathcal{S}$, 使得 $f_n \xrightarrow{C_{\ell 0}} f$. 记 $u_n = G_\lambda * f_n \in \mathcal{S}$(引理 2.5.7) . 同上可证， $u_n \xrightarrow{C_{\ell 0}} G_\lambda * f$. 因为 $\bar{\Delta}$ 是闭算子，所以根据

$$\bar{\Delta} u_n = \Delta u_n = \lambda u_n - f_n \xrightarrow{C_{\ell 0}} \lambda G_\lambda * f - f,$$

便可推出， $G_\lambda * f \in D(\bar{\Delta})$ 且 $(\lambda I - \bar{\Delta})(G_\lambda * f) = f$. 于是， (2.14) 式成立. 证毕.

如果在引理 2.5.9 中取 $\lambda > 0$, 在 Young 不等式中取 $r = 1, p = q = \infty$, 利用 (2.13) 式可得

$$\lambda \|G_\lambda * f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty = \|(\lambda I - \bar{\Delta}) G_\lambda * f\|_\infty, \qquad \forall\, f \in C_{\ell 0}.$$

所以，由上式及命题 2.2.1 知， $-\bar{\Delta}$ 是增生算子. 再由命题 2.2.3 和 (2.14) 式知， $-\bar{\Delta}$ 是 m- 增生算子. 这样就得到

定理 2.5.10 $-\bar{\Delta}$ 是 m- 增生算子.

接下来考察空间 C_ℓ. 当 $f \in C_\ell$ 时，记 $\ell(f) = \lim_{|x| \to \infty} f(x)$. 对于

$$f \in D(\Delta_\ell) := \{f \in C_\ell :\ f - \ell(f) \in D(\bar{\Delta})\},$$

定义 $\Delta_\ell f = \bar{\Delta}(f - \ell(f))$. 显然， Δ_ℓ 是稠定的. 类似于引理 2.5.9 的证明，可推出 $\sigma(\Delta_\ell) \subset (-\infty, 0]$, 并且

$$(\lambda I - \Delta_\ell)^{-1} f = G_\lambda * f, \qquad \forall\, f \in C_\ell,\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], \tag{2.15}$$

其中 G_λ 由 (2.11) 式给出.

类似于对 $\bar{\Delta}$ 所做的讨论，我们有

定理 2.5.11 $-\Delta_\ell$ 是 m- 增生算子.

2.5.4 $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ 中的波动算子

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是开集， $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. 令

$$\lambda = \inf\{\|\nabla u\|_2^2 :\ u \in H_0^1(\Omega),\ \|u\|_2 = 1\}. \tag{2.16}$$

当 Ω 有界时， $\lambda > 0$ 是 $-\Delta$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上的第一特征值. 设 $m > -\lambda$, 则可以在 X 中定义内积：

$$\langle (u,v),\, (w,z)\rangle := \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla w + muw + vz)\mathrm{d}x.$$

此内积确定了 X 上的一个范数, 该范数等价于通常意义下的范数 $\|(u,v)\| = \|u\|_{H_0^1} + \|v\|_2$. 在 X 上定义线性算子 A：

$$\begin{cases} D(A) = \{(u,v) \in X : \quad \Delta u \in L^2(\Omega),\, v \in H_0^1(\Omega)\}, \\ A(u,v) = (-v, -\Delta u + mu), \quad \forall\, (u,v) \in D(A). \end{cases}$$

定理 2.5.12 A 和 $-A$ 都是稠定的 m- 增生算子，从而 A 是斜共轭算子.

证明 因为 $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \subset D(A)$, 所以 $D(A)$ 在 X 中稠，这说明 A 和 $-A$ 都是稠定的. 下面先证 A 是增生算子. 利用 (2.8) 式，对于 $(u,v), (w,z) \in D(A)$, 我们有

$$\begin{aligned} \langle -A(u,v),\, (w,z)\rangle &= \int_\Omega [\nabla v \cdot \nabla w + mvw + (\Delta u - mu)z]\mathrm{d}x \\ &= -\int_\Omega [\nabla u \cdot \nabla z + muz + (\Delta w - mw)v]\mathrm{d}x \\ &= \langle (u,v),\, A(w,z)\rangle. \end{aligned} \tag{2.17}$$

在 (2.17) 式中，取 $(u,v) = (w,z)$, 便得

$$\langle A(u,v),\, (u,v)\rangle = 0.$$

因此， A 是增生算子 (定理 2.4.2). 现证 A 是 m- 增生算子. 任取 $(f,g) \in X$, 则方程 $(u,v) + A(u,v) = (f,g)$ 等价于下面的方程组

$$\begin{cases} (1+m)u - \Delta u = f + g, \\ v = u - f. \end{cases} \tag{2.18}$$

利用定理 2.5.1(具体细节可参见定理 2.5.2 的证明)，可证问题 (2.18) 的第一个方程存在解 $u \in H_0^1(\Omega)$, 并且满足 $\Delta u \in L^2(\Omega)$. 再求解 (2.18) 式的第二个方程，就得到 $v \in H_0^1(\Omega)$. 这样得到的 (u,v) 满足 $(u,v) \in D(A)$ 且 $(u,v) + A(u,v) = (f,g)$, 因此由命题 2.2.3 知， A 是 m- 增生算子. 类似可证， $-A$ 也是 m- 增生算子. 再利用推论 2.4.9 知， A 是斜共轭算子. 证毕.

2.5.5 $L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$ 中的波动算子

取 Ω 和 m 同于 2.5.4 节. 注意到 $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)\hookrightarrow (H_0^1(\Omega))'=H^{-1}(\Omega)$, 且这些嵌入都是紧的，我们可以在 $H_0^1(\Omega)$ 中定义内积 $\langle u,w\rangle=\int_\Omega(\nabla u\cdot\nabla w+muw)\mathrm{d}x$. 利用定理 2.5.1 知

$$H^{-1}(\Omega)=\{u\in\mathcal{D}'(\Omega):\ \exists\varphi_u\in H_0^1(\Omega)\ \text{使得}\ \Delta\varphi_u-m\varphi_u=u\ \text{在}\ \mathcal{D}'(\Omega)\ \text{中成立}\}. \tag{2.19}$$

定义 $H^{-1}(\Omega)$ 上的内积

$$\langle u,v\rangle_{-1}=\langle u,v\rangle_{H^{-1}}=\int_\Omega(\nabla\varphi_u\cdot\nabla\varphi_v+m\varphi_u\varphi_v)\mathrm{d}x.$$

取 $Y=L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$, 并在 Y 中定义线性算子 B：

$$\begin{cases}D(B)=H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega),\\ B(u,v)=(-v,-\Delta u+mu)\in Y, \qquad \forall\,(u,v)\in D(B).\end{cases}$$

定理 2.5.13 算子 B 和 $-B$ 都是稠定的 m- 增生算子，从而 B 是斜共轭算子.

证明 因为 $\mathcal{D}(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)\subset D(B)$, 所以 $D(B)$ 在 Y 中稠，即 B 和 $-B$ 都是稠定的. 下面先证 B 是 m- 增生算子. 设 $(u,v),(w,z)\in D(B)$, 考察由 (2.19) 式所定义的 φ_v 和 φ_z. 因为 $v,\,z\in L^2(\Omega)$, 所以有 $\Delta\varphi_v,\,\Delta\varphi_z\in L^2(\Omega)$. 由 (2.8) 式得

$$\begin{aligned}\langle -B(u,v),\,(w,z)\rangle_{L^2\times H^{-1}}&=\int_\Omega vw\mathrm{d}x+\langle\Delta u-mu,\,z\rangle_{-1}\\&=\int_\Omega vw\mathrm{d}x+\int_\Omega(\nabla u\cdot\nabla\varphi_z+mu\varphi_z)\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega vw\mathrm{d}x-\int_\Omega u(\Delta\varphi_z-m\varphi_z)\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega vw\mathrm{d}x-\int_\Omega uz\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{2.20}$$

类似可证

$$\langle(u,v),\,-B(w,z)\rangle_{L^2\times H^{-1}}=\int_\Omega zu\mathrm{d}x-\int_\Omega wv\mathrm{d}x.$$

于是

$$\langle B(u,v),\,(w,z)\rangle_{L^2\times H^{-1}}=-\langle(u,v),\,B(w,z)\rangle_{L^2\times H^{-1}}. \tag{2.21}$$

在 (2.20) 式中取 $(u,v)=(w,z)$, 便有

$$\langle B(u,v),\,(u,v)\rangle_{L^2\times H^{-1}}=0.$$

因此，B 是增生算子 (定理 2.4.2)．任取 $(f,g)\in Y$, 则方程 $(u,v)+B(u,v)=(f,g)$ 等价于 2.5.4 节中的方程组 (2.18)．利用定理 2.5.1 (细节可参见定理 2.5.2 的证明)，推出方程组 (2.18) 的第一个方程有解 $u\in H_0^1(\Omega)$. 再求解方程组 (2.18) 的第二个方程，可得 $v\in L^2(\Omega)$. 于是，$(u,v)\in D(B)$ 且 $(u,v)+B(u,v)=(f,g)$. 故由命题 2.2.3 知，B 是 m- 增生算子. 类似可证，$-B$ 是 m- 增生算子. 再利用推论 2.4.9 知，B 是斜共轭算子. 证毕.

定理 2.5.14 设 Y 和 B 同上，X 和 A 由 2.5.4 节给出. 那么在定理 2.3.1 所给定的意义下，Y 和 B 分别是 X 和 A 的延拓.

证明 定理 2.3.1 中的性质 (1),(3) 和 (4) 显然成立. 下面只需说明定理 2.3.1 中的性质 (2) 成立，即证

$$\|U\|_Y\approx\|(I+A)^{-1}U\|_X,\qquad \forall\, U\in X.$$

设 $U\in X, V\in D(A)$ 使得 $U=(I+A)V$. 我们将证明 $\|(I+A)V\|_Y\approx\|V\|_X$. 事实上，因为 B 是斜共轭算子，且 $D(A)\subset D(B)=X$, 所以

$$\|(I+A)V\|_Y^2=\langle (I+B)V,\,(I+B)V\rangle_Y=\|V\|_Y^2+\|BV\|_Y^2.$$

令 $V=(u,v)$, 便有

$$\begin{aligned}\|BV\|_Y^2&=\|v\|_2^2+\|-\Delta u+mu\|_{H^{-1}}^2=\|v\|_2^2+\|\nabla u\|_2^2+m\|u\|_2^2\\&=\|v\|_2^2+\|u\|_{H^1}^2=\|V\|_X^2.\end{aligned}$$

故结论成立.

2.5.6 Schrödinger 算子

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是开集，取 $Y=L^2(\Omega,\mathbb{C})$. 定义 Y 中的线性算子 B：

$$\begin{cases}D(B)=\{u\in H_0^1(\Omega,\mathbb{C}),\,\Delta u\in Y\},\\ Bu=-\mathrm{i}\Delta u,\quad\forall\, u\in D(B).\end{cases}$$

为了书写简便，记 $L^2(\Omega)=L^2(\Omega,\mathbb{C})$, $H_0^1(\Omega)=H_0^1(\Omega,\mathbb{C})$. 它们都是复 Hilbert 空间.

定理 2.5.15 算子 B 和 $-B$ 都是稠定的 m- 增生算子，因此 B 是斜共轭算子.

证明 由定理 2.5.2 以及推论 2.4.16 与推论 2.4.9 即得结论.

注 2.5.3 同于 2.5.1 节，如果边界 $\partial\Omega$ 属于 C^2 且有界，那么在等价范数的意义下，有 $D(B)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$.

记 $X=H^{-1}(\Omega)=H^{-1}(\Omega,\mathbb{C})$. 对任意给定的 $u\in X$, 用 $\varphi_u\in H_0^1(\Omega)$ 表示问题 $-\Delta\varphi_u+\varphi_u=u$ 在 X 中的解. 定义 X 上的内积：

$$\langle u,v\rangle_{-1}=\langle\varphi_u,\varphi_v\rangle_{H^1}=\mathrm{Re}\int_\Omega(\nabla\varphi_u\cdot\overline{\nabla\varphi}_v+\varphi_u\overline{\varphi}_v)\mathrm{d}x,\qquad\forall\,u,v\in X,\tag{2.22}$$

以及 X 中的线性算子 C：

$$\begin{cases}D(C)=H_0^1(\Omega),\\ Cu=-\Delta u,\qquad\forall\,u\in D(C).\end{cases}$$

定理 2.5.16 算子 C 是自共轭算子，并且 $C\geqslant 0$.

证明 因为 $\mathcal{D}(\Omega,\mathbb{C})\subset D(C)$, 所以 $D(C)$ 在 X 中稠. 进一步还有

$$\begin{aligned}\langle Cu,v\rangle_{-1}&=\langle Cu+u,v\rangle_{-1}-\langle u,v\rangle_{-1}\\&=\langle u,\varphi_v\rangle_{H^1}-\langle u,v\rangle_{-1}\\&=\langle u,v\rangle_{L^2}-\langle u,v\rangle_{-1},\qquad\forall\,u,v\in D(C).\end{aligned}\tag{2.23}$$

在上式中取 $u=v$, 可得

$$\langle Cu,\,u\rangle_{-1}=\|u\|_2^2-\|u\|_{H^{-1}}^2\geqslant 0,$$

所以， C 是增生算子. 利用定理 2.5.1 便知， C 是 m- 增生算子. 下证 C 是自共轭算子. 由 (2.23) 式得

$$\langle Cu,v\rangle_{-1}=\langle u,\,Cv\rangle_{-1},\qquad\forall\,u,v\in D(C).$$

由此推出 $G(C)\subset G(C^*)$, 故 C 是自共轭算子 (参见推论 2.4.8) .

最后，在 X 中考察由

$$\begin{cases}D(A)=H_0^1(\Omega),\\ Au=-\mathrm{i}\Delta u,\qquad\forall\,u\in D(A)\end{cases}$$

所定义的算子 A. 根据定理 2.5.16 和推论 2.4.16 以及推论 2.4.9，我们有下面的结论.

定理 2.5.17 算子 A 和 $-A$ 都是稠定的 m- 增生算子，从而 A 是斜共轭算子.

习 题 二

2.1 设 $M_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$, $M_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ 都是可测集, $f:\ M_1 \times M_2 \to \mathbb{C}$ 是可测函数，且存在 $C_1, C_2 > 0$, 使得

$$\int_{M_1} |f(x,y)|\mathrm{d}x \leqslant C_1,\ \ \forall\, y \in M_2; \qquad \int_{M_2} |f(x,y)|\mathrm{d}y \leqslant C_2,\ \ \forall\, x \in M_2.$$

对于 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 定义积分算子 A：

$$(Au)(y) = \int_{M_1} f(x,y)u(x)\mathrm{d}x, \qquad u \in L^p(M_1),\ \ y \in M_2.$$

试证明 $A:\ L^p(M_1) \to L^p(M_2)$ 且 $\|A\| \leqslant C_1^{1/q} C_2^{1/p}$, 其中 $1/p + 1/q = 1$.

2.2 设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范空间 X 中的线性算子. 试证明：如果 A 的预解集 $\rho(A)$ 非空，那么 A 一定是闭的.

2.3 用 $AC([a,b])$ 表示定义在 $[a,b]$ 上的绝对连续函数空间. 对于 $l > 0$ 及 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 定义

$$Au = u',\ \ \forall\, u \in D(A) := \{u \in AC([0,l]):\ u' \in L^p(0,l),\, u(0) = 0\}.$$

证明 $\sigma(A) = \varnothing$ 并求出 A 的预解式.

2.4 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $g \in L^p(0,1)$, u' 在 $[0,1]$ 上绝对连续，且满足 $u(0) = u(1) = 0$ 及

$$u(x) - \lambda u''(x) = g(x) \ \text{ 在 } (0,1) \text{ 上几乎处处成立},$$

其中 $\lambda \in (0,\infty)$. 试证明 $\|u\|_p \leqslant \|g\|_p$.

2.5 对于 $u \in C_0^1([0,1])$, 定义 $Au = u'$. 试证明：在 $C_0([0,1])$ 中 A 和 $-A$ 都是 m- 增生算子，并求出 A 的谱.

2.6 设 X 是 Banach 空间, A, B 是 X 中的闭线性算子, $D(B) \subset D(A)$, 并且 B 是 1–1 的、到上的. 试证明 $AB^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

2.7 取 $X = \{u:\ u \in C([0,1]),\, u(0) = u(1) = 0\}$. 假设 $a \in C([0,1])$, $a(x) > 0$. 定义

$$Au = -au'',\ \ u \in D(A) := \left\{u \in C^2([0,1]):\ u,\, u'' \in X\right\}.$$

试证明 A 是 m- 增生算子.

2.8 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是一个有界光滑区域, $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. 定义

$$\lambda = \inf\left\{\|\nabla u\|_2^2:\ u \in H_0^1(\Omega),\ \|u\|_2^2 = 1\right\},$$

$$\langle (u,v),(w,z)\rangle = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla w + muw + vz)\mathrm{d}x,\ \ m > -\lambda.$$

证明这样定义的 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是空间 X 中的内积，并且由该内积所确定的范数等价于通常意义下的范数 $\|(u,v)\| = \|u\|_{H_0^1} + \|v\|_2$.

第三章　线性算子半群

§3.1　引　　言

本书的主要目的是研究如下形式的抽象微分方程

$$\begin{cases} u'(t) + Au = F(t,u), \quad t > 0, \\ u(0) = x \in X, \end{cases} \tag{3.1}$$

其中， A 是 Banach 空间 X 上的线性算子， $F(t,u)$ 是具有某种特定性质的函数 (非线性函数)， u' 是函数 $u: [0,\infty) \to X$ 的导数，即

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{1}{h}[u(t+h) - u(t)] - u'(t)\right\| = 0.$$

当 $F \equiv 0$ 时，问题 (3.1) 成为

$$\begin{cases} u'(t) + Au = 0, \quad t > 0, \\ u(0) = x \in X. \end{cases} \tag{3.2}$$

如果对任意给定的初值 $u(0)$, 问题 (3.2) 在 $[0,\infty)$ 上均存在唯一解 $u(t)$, 那么存在线性算子 $Q(t)$, 使得对 $t, s \geqslant 0$, 有

$$u(t) = Q(t)u(0), \qquad Q(t)Q(s) = Q(t+s).$$

形式地把 $Q(t)$ 写成 $Q(t) = \mathrm{e}^{-At}$. 如果解关于初值连续，那么 $Q(t)$ 是有界的. 在应用中，通常可以使得 $Q(t)$ 的定义域是整个空间 X. 显然，映射 $t \mapsto Q(t)$ 应当具有某种连续性. 基于这些理由以及一些技巧方面的考虑，我们给出下面的定义.

定义 3.1.1　Banach 空间 X 上的一簇有界线性算子 $\{Q(t)\}_{t\geqslant 0}$ 称为是一个 **强连续半群**(或 C_0**半群**)，如果

(a)　$Q(0) = I$　(恒等映射)，

(b)　$Q(t)Q(s) = Q(t+s)$ 对所有 $t, s \geqslant 0$ 成立,

(c)　$\lim\limits_{t\to 0^+}\|Q(t)x - x\| = 0$ 对所有 $x \in X$ 成立.

以后，就记 $Q(t) = \{Q(t)\}_{t\geqslant 0}$.

定义 3.1.2　设 $Q(t)$ 是 Banach 空间 X 上的 C_0 半群．定义集合 $D(A) \subset X$：$x \in D(A)$ 当且仅当存在 $y \in X$，使得

$$\lim_{t \to 0^+} \left\| \frac{1}{t}[x - Q(t)x] - y \right\| = 0.$$

对于这样的 $x \in D(A)$ 以及与之对应的 y，定义 $Ax = y$．线性算子 $-A$ 就称为 C_0 半群 $Q(t)$ 的无穷小生成元.

§3.2　半群的基本性质

定理 3.2.1　设 $Q(t)$ 是 Banach 空间 X 上的 C_0 半群，$-A$ 是它的无穷小生成元．则以下结论成立：

(1) 存在常数 $M \geqslant 0$ 与 $a \in \mathbb{R}$，使得 $\|Q(t)\| \leqslant M\mathrm{e}^{-at}$ 对所有 $t \geqslant 0$ 成立；

(2) 对每一个 $x \in X$，映射 $Q(t)x \in C([0,\infty), X)$；

(3) 对 $x \in X$，$t \geqslant 0$，有

$$\int_0^t Q(s)x\mathrm{d}s \in D(A), \quad 且 \quad x - Q(t)x = A\int_0^t Q(s)x\mathrm{d}s.$$

(4) 对 $x \in D(A)$，记 $u(t) = Q(t)x$，$t \geqslant 0$．那么对每一个 $t \geqslant 0$，$u(t) \in D(A)$，导数 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)$ 存在，且成立

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) = -Au(t) = -Q(t)Ax,$$

也可以写成：在 $D(A)$ 上，$Q'(t) = -Q(t)A$；

(5) $(A - \lambda I)^{-1}Q(t) = Q(t)(A - \lambda I)^{-1}$，　$\forall\, \lambda \in \rho(A)$，$t \geqslant 0$，这里的 I 表示单位算子；

(6) A 是闭稠定线性算子；

(7) 假设 $\tau \in (0,\infty]$，$u : [0,\tau) \to X$ 连续．如果 $u(t) \in D(A)$，导数 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)$ 存在，并且满足

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) + Au(t) = 0, \qquad \forall\, t \in (0,\tau).$$

那么 $u(t) = Q(t)u(0)$ 在 $[0,\tau)$ 上成立；

(8) 如果 $T(t)$ 是 X 上的 C_0 半群，也以 $-A$ 为无穷小生成元，那么 $T(t) = Q(t)$ 对所有 $t \geqslant 0$ 成立；

(9) 对任意 λ(实数或复数)，$\{\mathrm{e}^{\lambda t}Q(t)\}_{t \geqslant 0}$ 是 X 上的 C_0 半群，其无穷小生成元是 $\lambda I - A$.

证明　首先证明 $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant\varepsilon}\|Q(t)\|<\infty$ 对某个 $\varepsilon>0$ 成立．如若不然，则存在 $t_n\in(0,1/n)$，使得 $\|Q(t_n)\|>n$．由一致有界原理 (Banach-Steinhaus 定理) 知，存在 $x\in X$，使得 $\sup\limits_n\|Q(t_n)x\|=\infty$．然而，由定义 3.1.1 知，$\lim\limits_{n\to\infty}Q(t_n)x=x$ 对每一个 $x\in X$ 都成立．这是一个矛盾．

因此，存在 $M\in(1,\infty)$ 和 $\varepsilon>0$，使得 $\|Q(t)\|\leqslant M$ 对所有 $t\in[0,\varepsilon]$ 成立．记 $M=\mathrm{e}^{-a\varepsilon}$，其中 $a<0$．对于 $n\geqslant 0$ 及 $n\varepsilon\leqslant t<(n+1)\varepsilon$，我们有

$$\|Q(t)\|=\|Q(t-n\varepsilon)Q^n(\varepsilon)\|\leqslant MM^n\leqslant M\mathrm{e}^{-at}.$$

故结论 (1) 成立．

因为对 $x\in X$，有

$$\begin{aligned}
&\|Q(t+h)x-Q(t)x\|\leqslant\|Q(t)\|\cdot\|Q(h)x-x\|,\quad \text{如果 } h\geqslant 0,\\
&\|Q(t-h)x-Q(t)x\|\leqslant\|Q(t-h)\|\cdot\|Q(h)x-x\|\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\leqslant M\mathrm{e}^{-a(t-h)}\|Q(h)x-x\|,\quad \text{如果 } 0\leqslant h\leqslant t,
\end{aligned}$$

所以结论 (2) 成立．

当 $t=0$ 时，结论 (3) 显然成立．而当 $t>0$ 时，因为对 $h>0$，有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}(I-Q(h))\int_0^t Q(s)x\mathrm{d}s\\
&=\frac{1}{h}\int_0^t Q(s)x\mathrm{d}s-\frac{1}{h}\int_0^t Q(s+h)x\mathrm{d}s\\
&=\frac{1}{h}\int_0^t Q(s)x\mathrm{d}s-\frac{1}{h}\int_h^{t+h} Q(s)x\mathrm{d}s\\
&=x-Q(t)x+\frac{1}{h}\int_0^h[Q(s)x-x]\mathrm{d}s-\frac{1}{h}\int_t^{t+h}[Q(s)x-Q(t)x]\mathrm{d}s\\
&\to x-Q(t)x,\qquad \text{当 } h\to 0 \text{ 时},
\end{aligned}$$

所以结论 (3) 成立．

下证结论 (4)．取 $h>0$．注意到对任意 $t\geqslant 0$，当 $h\to 0$ 时，有

$$\frac{1}{h}[I-Q(h)]Q(t)x=Q(t)\frac{1}{h}[x-Q(h)x]\to Q(t)Ax,$$

因此，$u(t)\in D(A)$，$Au(t)=Q(t)Ax$，并且 $D^+u(t)=-Au(t)$，这里的 D^+ 表示右导

数. 当 $t>0$ 时，因为对于 $0<h<t$, 有

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{h}[Q(t-h)x-Q(t)x]\\
&=Q(t-h)[Ax-\frac{1}{h}(x-Q(h)x)]-Au(t)+Q(t)Ax-Q(t-h)Ax\\
&\to -Au(t), \qquad 当\ h\to 0\ 时,
\end{aligned}
$$

所以 $D^-u(t)=-Au(t)$. 故结论 (4) 成立.

现证结论 (5) . 设 $y\in X$, 并记 $x=(A-\lambda I)^{-1}y$. 由结论 (4) 知

$$(A-\lambda I)Q(t)x=Q(t)(A-\lambda I)x=Q(t)y.$$

因此

$$(A-\lambda I)^{-1}Q(t)y=Q(t)x=Q(t)(A-\lambda I)^{-1}y, \qquad \forall\, y\in X.$$

故结论 (5) 成立.

下证结论 (6) . 设 $x_n\in D(A)$ 满足 $x_n\to x$, $Ax_n\to y$, 其中 $x,y\in X$. 利用结论 (4) 知

$$x_n-Q(t)x_n=\int_0^t Q(s)Ax_n\mathrm{d}s, \qquad t\geqslant 0.$$

从而，由控制收敛定理 (推论 1.2.8) 便推出

$$x-Q(t)x=\int_0^t Q(s)y\mathrm{d}s, \qquad t\geqslant 0.$$

于是当 $t\to 0^+$ 时，有

$$\frac{1}{t}[x-Q(t)x]=\frac{1}{t}\int_0^t Q(s)y\mathrm{d}s\to y,$$

因此， $x\in D(A)$ 且 $Ax=y$. 这说明 A 是闭的.

接下来说明 A 是稠定的，即证 $\overline{D(A)}=X$. 对任意给定的 $x\in X$, 记 $x_t=\frac{1}{t}\int_0^t Q(s)x\mathrm{d}s$, $t>0$. 由结论 (3) 知， $x_t\in D(A)$. 显然， $x_t\to x$. 因此， $\overline{D(A)}=X$. 故结论 (6) 成立.

现在证明结论 (7) . 取 $t\in(0,\tau)$, 记 $v(s,t)=Q(t-s)u(s)$, $s\in[0,t]$. 令 $\theta=t-s$, 则当 $s\in(0,t)$ 时， $\theta>0$, 且成立

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial s}&=Q(\theta)\frac{\partial u}{\partial s}+Q'(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial s}u(s)=Q(\theta)\frac{\partial u}{\partial s}-Q'(\theta)u(s)\\
&=-Q(\theta)Au(s)+Q(\theta)Au(s)=0.
\end{aligned}
$$

因此, $v(0,t)=v(t,t)$, 即 $u(t)=Q(t)u(0)$. 这说明结论 (7) 成立.

下证结论 (8). 选取 $x\in D(A)$, 并记 $u(t)=T(t)x$. 由结论 (4) 知, 对于 $\tau=\infty$, u 满足结论 (7) 的条件. 从而 $T(t)x=Q(t)x$ 对 $t\geqslant 0$ 成立. 又因为 $D(A)$ 在 X 中是稠的, 所以结论 (8) 成立.

结论 (9) 可以直接由定义 3.1.1 和定义 3.1.2 推出. 证毕.

定理 3.2.2 设 $-A$ 是 C_0 半群 $Q(t)$ 的无穷小生成元. 如果存在 $M\geqslant 0$ 与 $a\in\mathbb{R}$, 使得 $\|Q(t)\|\leqslant M\mathrm{e}^{-at}$ 对所有 $t\geqslant 0$ 成立. 那么, 只要 λ 满足 $\mathrm{Re}\,\lambda<a$, 就有 $\lambda\in\rho(A)$, 并且还成立

$$\|(A-\lambda I)^{-n}\|\leqslant M(a-\mathrm{Re}\lambda)^{-n},\qquad \forall\, n\geqslant 1,$$
$$(A-\lambda I)^{-n}x=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty s^{n-1}\mathrm{e}^{\lambda s}Q(s)x\mathrm{d}s,\qquad \forall\, n\geqslant 1,\ x\in X.$$

证明 对于 $n\geqslant 1$ 及 $x\in X$, 定义

$$R_nx=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty s^{n-1}\mathrm{e}^{\lambda s}Q(s)x\mathrm{d}s.$$

显然, R_n 是 X 上的线性算子. 因为

$$\|R_nx\|\leqslant\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty s^{n-1}M\mathrm{e}^{(\mathrm{Re}\lambda-a)s}\|x\|\mathrm{d}s=M(a-\mathrm{Re}\lambda)^{-n}\|x\|,$$

所以, $R_n\in\mathcal{L}(X)$. 接下来用数学归纳法证明 $R_n=(A-\lambda I)^{-n}$.

任取 $x\in D(A)$, 由定理 3.2.1 的结论 (3), (4) 和 (9) 便知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{\lambda t}Q(t)x)=\mathrm{e}^{\lambda t}Q(t)(\lambda I-A)x=(\lambda I-A)\mathrm{e}^{\lambda t}Q(t)x,$$

$$\int_0^t\mathrm{e}^{\lambda s}Q(s)(A-\lambda I)x\mathrm{d}s=x-\mathrm{e}^{\lambda t}Q(t)x=(A-\lambda I)\int_0^t\mathrm{e}^{\lambda s}Q(s)x\mathrm{d}s.\tag{3.3}$$

因为 A 是闭的, 所以可以在 (3.3) 式中令 $t\to\infty$, 再利用控制收敛定理知

$$R_1x\in D(A),\ \text{且}\ x=(A-\lambda I)R_1x=R_1(A-\lambda I)x.$$

由于 A 是闭稠定的, 且 R_1 是有界的, 因此进一步可推出, 对任意 $x\in X$, 有

$$R_1x\in D(A),\quad (A-\lambda I)R_1x=x.$$

于是, $(A-\lambda I)^{-1}=R_1$.

假定 $R_n=(A-\lambda I)^{-n}$ 对某个 $n\geqslant 1$ 成立. 任取 $x\in X$, 则有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{t^n\mathrm{e}^{\lambda t}Q(t)R_1x\}&=nt^{n-1}\mathrm{e}^{\lambda t}Q(t)R_1x+t^n\mathrm{e}^{\lambda t}Q(t)(\lambda I-A)R_1x\\&=nt^{n-1}\mathrm{e}^{\lambda t}Q(t)R_1x-t^n\mathrm{e}^{\lambda t}Q(t)x,\end{aligned}$$

从而

$$t^n e^{\lambda t} Q(t) R_1 x = n \int_0^t s^{n-1} e^{\lambda s} Q(s) R_1 x ds - \int_0^t s^n e^{\lambda s} Q(s) x ds. \tag{3.4}$$

因为

$$\|t^n e^{\lambda t} Q(t) R_1 x\| \leqslant M t^n e^{(\operatorname{Re}\lambda - a)t} \|R_1 x\|,$$

所以当 $t \to \infty$ 时， $t^n e^{\lambda t} Q(t) R_1 x \to 0$. 在 (3.4) 式中，令 $t \to \infty$, 并利用控制收敛定理，就得到

$$R_{n+1} x = R_n R_1 x = (A - \lambda I)^{-n-1} x.$$

由 $x \in X$ 的任意性知， $R_{n+1} = (A - \lambda I)^{-(n+1)}$. 证毕.

推论 3.2.3 设 $-A$ 是 C_0 半群 $Q(t)$ 的无穷小生成元. 如果 $\lambda \in \sigma(A), b \in \mathbb{R}$ 满足 $b > \operatorname{Re}\lambda$, 那么存在 $x \in X$, 使得 $\sup\limits_{t>0} \|Q(t)x\| e^{bt} = \infty$.

证明 假设结论不成立，那么由一致有界原理知， $\sup\limits_{t>0} \|Q(t)\| e^{bt} < \infty$. 从而由定理 3.2.2 推出， $\lambda \in \rho(A)$. 这是一个矛盾.

如果 A 的谱包含半平面 $\operatorname{Re}\lambda < 0$ 的一部分，那么存在 $x \in X$, 使得 $Q(t)x$ 无界. 事实上，在此情况下，还可以选取 $x \in D(A)$, 使得该结论成立.

下面的定理 3.2.4 和定理 3.2.2 合称为 Hille-Yosida 定理. 它给出了一个算子是 C_0 半群的无穷小生成元的条件. 其证明篇幅较长，且极具技巧性. 然而从本质上来讲，就是验证

$$\lim_{n\to\infty} \left(I + \frac{tA}{n}\right)^{-n} = e^{-tA}.$$

显而易见，当 t 和 A 都是实数时，上述等式成立.

定理 3.2.4 设 A 是 Banach 空间 X 中的稠定线性算子. 如果存在常数 $M \geqslant 0$ 以及满足 $(-\infty, a) \subset \rho(A)$ 的 $a \in \mathbb{R}$, 使得

$$\|(A - \lambda I)^{-n}\| \leqslant M(a - \lambda)^{-n}, \qquad \forall\, \lambda \in (-\infty, a), \qquad n = 1, 2, \cdots. \tag{3.5}$$

那么存在 X 中的 C_0 半群 $Q(t)$, 其无穷小生成元为 $-A$, 并且满足

$$\|Q(t)\| \leqslant M e^{-at}, \qquad \forall\, t \geqslant 0, \tag{3.6}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \left\| Q(t)x - \left(I + \frac{t}{n} A\right)^{-n} x \right\| = 0, \qquad \forall\, T \in (0, \infty), \quad x \in X. \tag{3.7}$$

证明 取定 $T \in (0, \infty)$, 则存在 $K = K(a, T) \gg 1$, 使得 $K e^{at} > 1$ 对所有 $t \in [0, T]$ 成立. 从而存在 $N = N(a, T) \gg 1$, 使得

$$n + at > 0, \quad \left(1 + \frac{at}{n}\right)^{-1} \leqslant K, \quad \left(1 + \frac{at}{n}\right)^{-n} \leqslant K, \qquad \forall\, t \in [0, T], \quad n \geqslant N. \tag{3.8}$$

定义

$$\begin{cases} R_n(0) = I, \qquad n \geqslant N, \\ R_n(t) = \dfrac{n}{t}\Big(\dfrac{n}{t}I + A\Big)^{-1} = \Big(I + \dfrac{t}{n}A\Big)^{-1}, \qquad t \in (0,T], \quad n \geqslant N. \end{cases} \tag{3.9}$$

由估计式 (3.5) 得

$$\|R_n(t)\| \leqslant M\Big(1 + \frac{at}{n}\Big)^{-1}, \qquad \|R_n^n(t)\| \leqslant M\Big(1 + \frac{at}{n}\Big)^{-n}, \qquad \forall\, t \in [0,T], \quad n \geqslant N. \tag{3.10}$$

从而由不等式 (3.8) 知

$$\|R_n(t)\| \leqslant MK, \qquad \|R_n^n(t)\| \leqslant MK, \qquad \forall\, t \in [0,T], \quad n \geqslant N. \tag{3.11}$$

任取 $x \in X$, $y \in D(A)$, $t \in (0,T]$, $n \geqslant N$. 利用 (3.9) 式及 (3.11) 式推出

$$R_n(t)x - x = (R_n(t) - I)(x - y) - \frac{t}{n}R_n(t)Ay,$$

$$\|R_n(t)x - x\| \leqslant (1 + MK)\|x - y\| + \frac{tMK}{n}\|Ay\|. \tag{3.12}$$

因为 $D(A)$ 在 X 中稠，所以估计式 (3.12) 蕴涵

$$\lim_{t\to 0^+} \|R_n(t)x - x\| = 0, \qquad \forall\, n \geqslant N, \quad x \in X.$$

利用数学归纳法，可以证明

$$\lim_{t\to 0^+} \|R_n^m(t)x - x\| = 0, \qquad \forall\, x \in X, \quad m, n \geqslant N. \tag{3.13}$$

由于 $D(A)$ 在 X 中稠，因此，利用估计式 (3.12) 还可以推出

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \|R_n(t)x - x\| = 0, \qquad \forall\, x \in X. \tag{3.14}$$

对于 $t \in (0,T]$, $t + h \in (0,T]$, 利用

$$R_n(t+h) - R_n(t) + \frac{h}{n}AR_n^2(t) = \Big(\frac{h}{t}\Big)^2 (I - R_n(t))^2 R_n(t+h)$$

以及估计式 (3.11) 知， $R_n'(t) = -(1/n)AR_n^2(t)$. 于是，归纳可证

$$(R_n^m)'(t) = -\frac{m}{n}AR_n^{m+1}(t), \qquad \forall\, t \in (0,T], \quad n, m \geqslant N. \tag{3.15}$$

此式结合 (3.13) 式与 (3.11) 式推出

$$x - R_n^n(t)x = \int_0^t R_n^{n+1}(s)Ax\mathrm{d}s, \qquad \forall\, t \in [0,T], \quad x \in D(A). \tag{3.16}$$

现在证明 (3.7) 式. 如果 $y\in D(A^2)$, $t\in(0,T]$, 那么由 (3.15) 式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\{R_n^n(t-s)R_m^m(s)y\}=R_n^{n+1}(t-s)R_m^{m+1}(s)\left(\frac{s}{m}-\frac{t-s}{n}\right)A^2y,\qquad s\in(0,t).\tag{3.17}$$

联立上式与 (3.13) 式以及 (3.11) 式，可推出

$$R_m^m(t)y-R_n^n(t)y=\int_0^t R_n^{n+1}(t-s)R_m^{m+1}(s)\left(\frac{s}{m}-\frac{t-s}{n}\right)A^2y\mathrm{d}s.\tag{3.18}$$

对于 $x\in X$, 利用

$$R_m^m(t)x-R_n^n(t)x=[R_m^m(t)-R_n^n(t)](x-y)+R_m^m(t)y-R_n^n(t)y$$

以及 (3.18) 式和估计式 (3.11), 我们有

$$\|R_m^m(t)x-R_n^n(t)x\|\leqslant 2MK\|x-y\|+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\Big)(TM^2K^2)^2\|A^2y\|.$$

因为 $R_n^2(t)x\in D(A^2)$ 对所有 $x\in X$ 成立, 所以 (3.13) 式说明， $D(A^2)$ 在 X 中稠. 从而

$$\lim_{m,\,n\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}\|R_m^m(t)x-R_n^n(t)x\|=0,\qquad\forall\, x\in X.\tag{3.19}$$

由于 $T\in(0,\infty)$ 是任意的，因此基于 (3.19) 式，我们可以按如下方式定义 $Q(t)$：

$$Q(t)x=\lim_{n\to\infty}R_n^n(t)x,\qquad t\geqslant 0,\ x\in X.\tag{3.20}$$

根据该定义以及 (3.9) 式便知， (3.7) 式成立. 显然， $Q(0)=I$. 因为对于 $x\in X$ 及 $n\geqslant N$, 映射 $R_n^n(\cdot)x:[0,T]\to X$ 连续，所以由 (3.19) 式知，对于 $x\in X$, 映射 $Q(\cdot)x:[0,\infty)\to X$ 连续. 另一方面，由估计式 (3.10) 得

$$\|Q(t)\|\leqslant M\mathrm{e}^{-at},\qquad\forall\, t\in[0,T].\tag{3.21}$$

在 (3.17) 式中，取 $m=n$, 再对所得结果从 s 到 t 积分，并利用 (3.11) 式便推出，对于 $y\in D(A^2)$ 和 $n\geqslant N$, 有

$$\|R_n^n(t-s)R_n^n(s)y-R_n^n(t)y\|\leqslant\frac{t^2M^4K^4}{n}\|A^2y\|,\qquad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T.$$

由此推出

$$Q(t-s)Q(s)y=Q(t)y,\qquad 0\leqslant s\leqslant t,\ y\in D(A^2).$$

因为 $D(A^2)$ 在 X 中稠, 并且已证 $Q(t)$ 有界, 所以对任意 $t, s \geqslant 0$, 均有 $Q(t)Q(s) = Q(t+s)$. 这说明 $Q(t)$ 是 X 上的 C_0 半群. 记 $Q(t)$ 的无穷小生成元为 $-\hat{A}$. 利用 (3.11) 式、 (3.14) 式、 (3.16) 式以及控制收敛定理即得

$$x - Q(t)x = \int_0^t Q(s)Ax\mathrm{d}s, \qquad t \geqslant 0, \quad x \in D(A).$$

由此及 $Q(t)$ 的强连续性知, $\hat{A}$ 是 A 的延拓. 根据 (3.21) 式和定理 3.2.2 知, $a-1 \in \rho(\hat{A})$. 由已知条件推出, $a-1 \in \rho(A)$. 从而 $a-1 \in \rho(A) \cap \rho(\hat{A})$. 最后, 利用命题 2.1.12 知, $A = \hat{A}$. 证毕.

注 3.2.1 当 A 是实数时, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(I + \dfrac{t}{n}A\right)^{-n} = \mathrm{e}^{-tA}$ 成立. 所以根据 (3.7) 式, 我们可以记 C_0 半群 $Q(t) = \mathrm{e}^{-tA}$.

利用定理 3.2.2 和定理 3.2.4, 我们有

定理 3.2.5 设 A 是 Banach 空间 X 中的线性算子. 那么 $-A$ 是满足 $\|Q(t)\| \leqslant M\mathrm{e}^{-at}$ 的 C_0 半群 $Q(t)$ 的无穷小生成元, 当且仅当

(1) A 在 X 中是稠定的;

(2) 预解集 $\rho(A)$ 包含射线 $(-\infty, a)$, 并且成立

$$\|(A - \lambda I)^{-n}\| \leqslant M(a-\lambda)^{-n}, \qquad \forall\, \lambda < a, n = 1, 2, \cdots. \tag{3.22}$$

注 3.2.2 不等式 (3.22) 说明 A 是闭算子.

设 $Q(t)$ 是 Banach 空间 X 上的 C_0 半群. 对于任意的 $t \geqslant 0$, $Q(t)$ 是 X 上的有界线性算子, 记 $Q^*(t)$ 为 $Q(t)$ 的共轭算子.

定理 3.2.6 设 $-A$ 是自反的 Banach 空间 X 上的 C_0 半群 $Q(t)$ 的无穷小生成元, 则 $Q^*(t) := \{Q^*(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是 X^* 上的 C_0 半群, 其无穷小生成元是 $-A^*$.

证明 因为 A 是闭稠定算子, 所以 A^* 也是闭稠定算子 (定理 3.2.1 和定理 2.1.6). 由定理 3.2.1 知, 存在常数 $M \geqslant 0$ 和 $a \in \mathbb{R}$, 使得 $\|Q(t)\| \leqslant M\mathrm{e}^{-at}$ 对 $t \geqslant 0$ 成立. 再由定理 3.2.2 得

$$\|(A - \lambda I)^{-n}\| \leqslant M(a-\lambda)^{-n}, \qquad n \geqslant 1,\ \lambda < a.$$

因此, 根据定理 2.1.5 和定理 2.1.11 , 我们有

$$\|(A^* - \lambda I)^{-n}\| \leqslant M(a-\lambda)^{-n}, \qquad n \geqslant 1,\ \lambda < a.$$

由此及定理 3.2.4 推出, $-A^*$ 是 X^* 上的某个 C_0 半群 $R(t)$ 的无穷小生成元. 利

用定理 3.2.4 和定理 2.1.11 得

$$\begin{aligned}(R(t)\ell)x &= \lim_{n\to\infty}[(I+(t/n)A^*)^{-n}\,\ell]x \\ &= \lim_{n\to\infty}\ell((I+(t/n)A)^{-n}x) \\ &= \ell(Q(t)x) = (Q^*(t)\ell)x, \qquad \forall\, x\in X,\ \ell\in X^*,\ t\geqslant 0.\end{aligned}$$

因此对 $t\geqslant 0$, 有 $R(t)=Q^*(t)$. 证毕.

注意到 Hilbert 空间是自反的，我们有

推论 3.2.7 如果 $-A$ 是 Hilbert 空间 X 上的 C_0 半群 $Q(t)$ 的无穷小生成元，那么 $Q^*(t)$ 是 X^* 上的 C_0 半群，其无穷小生成元是 $-A^*$.

称 C_0 半群 $Q(t)$ 为**收缩半群**，如果 $\|Q(t)\|\leqslant 1$ 对所有 $t\geqslant 0$ 均成立.

定理 3.2.8 (Hille-Yosida-Phillips 定理) 设 A 是 Banach 空间 X 上的线性算子，则 $-A$ 是一个收缩半群的无穷小生成元当且仅当 A 是稠定的 m- 增生算子.

证明 假设 A 是稠定的 m- 增生算子，则由定义 2.2.2 知，$(-\infty,0)\subset\rho(A)$. 此外，由定理 2.2.2 知，对于 $M=1$ 以及 $a=0$, 定理 3.2.4 的条件成立. 因此，根据定理 3.2.4 知，$-A$ 是某个收缩半群的无穷小生成元.

假设 $-A$ 是收缩半群 $Q(t)$ 的无穷小生成元,则由定理 3.2.2 知，$A+1$ 是到上的. 设 $x\in D(A)$. 由注 2.1.1 知, 存在 $\ell\in F(x)$, 即 $\ell\in X^*$ 并且满足 $\ell(x)=\|\ell\|^2=\|x\|^2$. 定义 $f(t)=\mathrm{Re}\,\ell(Q(t)x)$, 则有

$$f(0)=\|x\|^2,\ \ \text{且}\ f(t)\leqslant\|x\|^2,\ \ f'(t)=-\mathrm{Re}\,\ell\,(Q(t)Ax), \qquad t\geqslant 0.$$

所以，$\mathrm{Re}\langle Ax,\ell\rangle=\mathrm{Re}\,\ell(Ax)=-f'(0)\geqslant 0$. 由此知，$A$ 是增生算子. 又 $A+I$ 是到上的，故由命题 2.2.3 知，A 是 m- 增生算子. 证毕.

推论 3.2.9 如果 A 是 Hilbert 空间上的线性算子, 则 $-A$ 是一个收缩半群的无穷小生成元当且仅当 A 是 m- 增生算子.

在本节的最后，我们引入**等距群**的概念，并且证明 Hilbert 空间上的一个斜共轭算子一定是某个等距群的无穷小生成元.

定义 3.2.1 Hilbert 空间 H 上的一簇单参数线性算子 $\{Q(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 称为是一个等距群，如果以下条件成立：

(1) $\|Q(t)x\|=\|x\|, \qquad \forall\, x\in H,\ t\in\mathbb{R}$;

(2) $Q(0)=I,\ \ Q(t+s)=Q(t)Q(s), \qquad \forall\, s,t\in\mathbb{R}$;

(3) 对任意 $x\in H$, 函数 $Q(t)x\in C(\mathbb{R},H)$.

定理 3.2.10 设 H 是 Hilbert 空间，A 是 H 上的斜共轭算子, 则 $-A$ 是某个等距群 $\{Q(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 的无穷小生成元. 同时，对任意 $x\in D(A)$, 函数 $u(t)=Q(t)x\in$

$C(\mathbb{R}, D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}, H)$, 且满足

$$u'(t) + Au(t) = 0, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{3.23}$$

此外，还有

$$Q^*(t) = Q(-t), \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{3.24}$$

证明 因为 A 是斜共轭算子，所以 A 是稠定的，且 A 和 $-A$ 都是 m- 增生算子 (见推论 2.4.7)． Hille-Yosida-Phillips 定理说明， $-A$ 和 A 分别是收缩半群 $\{Q^+(t)\}_{t\geqslant 0}$ 和 $\{Q^-(t)\}_{t\geqslant 0}$ 的无穷小生成元．令

$$Q(t) = \begin{cases} Q^+(t), & t \geqslant 0, \\ Q^-(-t), & t \leqslant 0. \end{cases}$$

那么定义 3.2.1 中的条件 (2) 和 (3) 成立．现在说明定义 3.2.1 中的条件 (1) 成立．对 $t \geqslant 0$, 有

$$\|Q(t)x\| = \|Q^+(t)x\| \leqslant \|x\|,$$
$$\|x\| = \|Q(-t)Q(t)x\| = \|Q^-(t)Q^+(t)x\| \leqslant \|Q(t)x\|.$$

从而 $\|Q(t)x\| = \|x\|$. 对于 $t < 0$ 的情形，证明完全相同．所以由定义 3.2.1 知， $-A$ 是等距群 $Q(t)$ 的无穷小生成元．

下证 (3.23) 式．对 $x \in D(A)$, 有

$$\left.\frac{\mathrm{d}^+u}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = -Ax = \left.\frac{\mathrm{d}^-u}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0},$$

从而 $u'(0) = -Ax = -Au(0)$. 再由定理 3.2.1 的性质 (4) 可得 (3.23) 式．

最后证明 (3.24) 式．对于 $x \in D(A)$, 记 $u(t) = Q(t)x$, $v(t) = Q^*(t)x$. 利用 $A^* = -A$ 和推论 3.2.7 得

$$u'(t) + Au(t) = 0,$$
$$v'(t) - Av(t) = v'(t) + A^*v(t) = 0.$$

令 $w(t) = v(-t)$, 则有

$$w'(t) = -v'(-t) = -Av(-t) = -Aw(t), \qquad w(0) = x.$$

由解的唯一性知， $u(t) = w(t) = v(-t)$, 即 $Q(t)x = Q^*(-t)x$. 再利用稠密性知， $Q(t) = Q^*(-t)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. 证毕．

§3.3 扇形算子与解析半群

如果 $Q(t)$ 是 Banach 空间 X 上的 C_0 半群， $-A$ 是它的无穷小生成元. 那么，由定理 3.2.1 知，对任意 $x \in D(A)$, 问题 (3.2) 有解 $u(t) = Q(t)x$. 然而，对于 $x \in X \setminus D(A)$, 我们不知道问题 (3.2) 是否还有解. 为了更好地了解问题 (3.2) 的可解性，我们引入 **扇形算子** 、 **可微半群** 和 **解析半群** 的概念.

约定 $\arg 0 = 0$. 当 $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 时， $\arg\zeta \in [-\pi, \pi)$, 并记 $\zeta = |\zeta|e^{i\arg\zeta}$.

定义 3.3.1 假定 $a \in \mathbb{R}, M > 0, \theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$,$X$ 是复 Banach 空间. 取 $\mathcal{U}(a, M, \theta, X)$ 是 X 上具有如下性质的闭稠定线性算子 A 的全体：对满足 $|\arg(\lambda - a)| \geqslant \theta$ 的任意 $\lambda \in \mathbb{C}$, 均有

$$\lambda \in \rho(A), \quad 且 \quad \|(A - \lambda I)^{-1}\| \leqslant \frac{M}{|\lambda - a|}.$$

如果 A 属于某个集合 $\mathcal{U}(a, M, \theta, X)$, 就称 A 是 **扇形算子**.

定义 3.3.2 设 $Q(t)$ 是 Banach 空间 X 上的 C_0 半群. 如果对任意 $x \in X$, 函数 $Q(t)x$ 关于 $t > 0$ 可微，那么就称 $Q(t)$ 是 **可微半群** .

定义 3.3.3 Banach 空间 X 上的一簇有界线性算子 $Q(t)$ 称为是 **实解析半群** ，如果

(1) 对任意 $x \in X$ 和 $\ell \in X^*$, 函数 $\ell(Q(t)x)$ 关于 $t \in (0, \infty)$ 实解析；

(2) $Q(0) = I$, 且对任意 $x \in X$, 均有 $\lim\limits_{t \to 0^+} Q(t)x = x$;

(3) $Q(t + s) = Q(t)Q(s)$ 对所有 $s, t \geqslant 0$ 成立.

定义 3.3.4 记 $S := \{z : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2, \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$, 设 $Q(z) := \{Q(z)\}_{z \in S}$ 是 Banach 空间 X 上的一簇有界线性算子. 称 $Q(z)$ 为 **解析半群** ，如果

(1) 对任意 $x \in X$ 与 $\ell \in X^*$, 函数 $\ell(Q(z)x)$ 关于 $z \in S$ 解析；

(2) $Q(0) = I$, 且对任意 $x \in X$, 均有 $\lim\limits_{\substack{z \in S \\ z \to 0}} Q(z)x = x$;

(3) 对任意 $z_1, z_2 \in S$, 等式 $Q(z_1 + z_2) = Q(z_1)Q(z_2)$ 均成立.

3.3.1 可微半群和解析半群的性质

定理 3.3.1 设 $Q(t)$ 是可微半群， $-A$ 是它的无穷小生成元. 那么对任意 $x \in X$, 问题 (3.2) 有唯一解 $u(t; x) = Q(t)x$.

证明 因为 $Q(t)$ 是可微的，所以对任意 $t > 0$ 与 $x \in X$, 极限

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}[Q(h)Q(t)x - Q(t)x] = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}[Q(t + h)x - Q(t)x]$$

存在. 这说明

$$Q(t)x \in D(A), \quad 且 \quad \frac{\mathrm{d}^+Q(t)}{\mathrm{d}t} = -AQ(t).$$

类似可得 $\dfrac{\mathrm{d}^-Q(t)}{\mathrm{d}t} = -AQ(t)$. 所以, $\dfrac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = -AQ(t)$. 定理 3.2.1 的结论 (7) 保证了解的唯一性. 证毕.

推论 3.3.2 若 $-A$ 是一个解析半群的无穷小生成元, 则对任意 $x \in X$, 问题 (3.2) 有唯一解.

如果 $-A$ 是一个不可微 C_0 半群的无穷小生成元, 那么一般而言, 当 $x \notin D(A)$ 时, 初值问题 (3.2) 没有解. 我们称函数 $Q(t)x$ 是问题 (3.2) 的 "广义解", 这个广义解通常又称为 **适度解** . 虽然定义初值问题 (3.2) 的广义解的方法有多种, 但是不管用哪种方法定义广义解, 最终都将推出与 $Q(t)x$ 保持一致. 一种定义广义解的方法就是: 称 $[0,\infty)$ 上的连续函数 u 是问题 (3.2) 的广义解, 如果存在 $x_n \in D(A)$, 使得 $x_n \to u(0)$, 并且 $Q(t)x_n \to u(t)$ 在任一有界区间上一致成立. 显然, 用这种方法所定义的广义解不依赖于序列 $\{x_n\}$ 的选取, 并且是唯一的. 此外, 当初值 $u(0) \in D(A)$ 时, 这样定义的广义解就是问题 (3.2) 的真正解. 根据这个定义, 对每一个 $x \in X$, 问题 (3.2) 均有广义解 $Q(t)x$.

定理 3.3.3 设 $Q(t)$ 是可微半群, B 是它的无穷小生成元, 则以下结论成立:

(1) 对所有 $t > 0$ 和 $n \geqslant 1$, $Q(t): X \to D(B^n)$. 此外, 对任意 $x \in X$, 函数 $Q(t)x$ 关于 $t > 0$ 无穷次连续可微, 并且 $Q^{(n)}(t) = B^nQ(t)$ 是有界线性算子;

(2) 对任意 $n \geqslant 1$, $Q^{(n-1)}(t)$ 关于 $t > 0$ 连续;

(3) $Q^{(n)}(t) = \left(BQ\left(\dfrac{t}{n}\right)\right)^n = \left(Q'\left(\dfrac{t}{n}\right)\right)^n$.

证明 当 $n = 1$ 时. 由假设条件知, 对任意 $t > 0$ 与 $x \in X$, 有 $Q(t)x \in D(B)$, $Q'(t)x = BQ(t)x$. 因为 B 是闭的且 $Q(t)$ 有界, 易证, 对任意给定的 $t > 0$, $BQ(t)$ 是闭的. 利用闭图象定理 (定理 2.1.1) 可推知, $BQ(t)$ 是有界线性算子.

下面估计 $\|Q(t_2)x - Q(t_1)x\|$. 记 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\|Q(t)\| = M_1$, 则对任意 $0 < t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_1 + 1$, 有

$$\begin{aligned}\|Q(t_2)x - Q(t_1)x\| &= \left\|\int_{t_1}^{t_2} BQ(s)x\mathrm{d}s\right\| = \left\|\int_{t_1}^{t_2} Q(s-t_1)BQ(t_1)x\mathrm{d}s\right\| \\ &\leqslant M_1\|BQ(t_1)\| \cdot \|x\|(t_2 - t_1),\end{aligned}$$

即

$$\|Q(t_2) - Q(t_1)\| \leqslant M_1\|BQ(t_1)\|(t_2 - t_1).$$

这表明 $Q(t)$ 关于 $t > 0$ 连续. 因此当 $n = 1$ 时, 结论 (1)~(3) 成立.

接下来，采用数学归纳法进行证明．假设结论 (1)~(3) 对某个 $n \geqslant 1$ 成立．任意给定 $t > 0$ 及 $x \in X$, 取 $0 < s < t$. 因为 $Q(t): X \to D(B^n)$, $Q^{(n)}(t)x = B^nQ(t)x$, 所以

$$Q^{(n)}(t)x = B^nQ(t-s)Q(s)x = Q(t-s)B^nQ(s)x \in D(B).$$

故 $Q(t)x \in D(B^{n+1})$ 且

$$Q^{(n+1)}(t)x = BQ(t-s)B^nQ(s)x = B^{n+1}Q(t)x, \qquad \forall\, x \in X,\ t > 0.$$

由于 $B^{n+1}Q(t) = B(B^nQ(t))$ 是闭的且 $D(B^{n+1}Q(t)) = X$, 因此利用闭图象定理知， $B^{n+1}Q(t) = B(B^nQ(t))$ 是有界的．即结论 (1) 对 $n+1$ 成立．

对于 $0 < t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_1 + 1$, 我们有

$$\begin{aligned}\|Q^{(n)}(t_2)x - Q^{(n)}(t_1)x\| &= \left\|\int_{t_1}^{t_2} B^{n+1}Q(s)x\mathrm{d}s\right\| \\ &= \left\|\int_{t_1}^{t_2} Q(s-t_1)B^{n+1}Q(t_1)x\mathrm{d}s\right\| \\ &\leqslant M_1\|B^{n+1}Q(t_1)\|\cdot\|x\|(t_2-t_1).\end{aligned}$$

这表明， $Q^{(n)}(t)$ 关于 $t > 0$ 连续．即结论 (2) 对 $n+1$ 成立．

最后证明结论 (3) 对 $n+1$ 成立．因为对 $0 < s \leqslant t$, 有

$$\begin{aligned}Q^{(n)}(t) &= \left(BQ\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(BQ\left(\frac{t-s}{n}\right)Q\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n \\ &= \left(Q\left(\frac{t-s}{n}\right)BQ\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n = Q(t-s)\left(BQ\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n,\end{aligned}$$

所以

$$Q^{(n+1)}(t) = BQ(t-s)\left(BQ\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n.$$

取 $s = \dfrac{nt}{n+1}$, 便有

$$Q^{(n+1)}(t) = BQ\left(\frac{t}{n+1}\right)\left(BQ\left(\frac{t}{n+1}\right)\right)^n = \left(BQ\left(\frac{t}{n+1}\right)\right)^{n+1}.$$

这说明，结论 (3) 对于 $n+1$ 成立．证毕．

定理 3.3.4 设 $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 记 $S := \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \beta,\ z \neq 0\}$. 如果 $\{Q(z)\}_{z \in S \cap \{0\}}$ 是复 Banach 空间 X 上的一簇有界线性算子，并且满足：

(1) 存在 M 和 $a \in \mathbb{R}$, 使得 $\|Q(z)\| \leqslant M\mathrm{e}^{-a\mathrm{Re}\, z}$ 对所有 $z \in S$ 成立；

(2) 对任意 $\ell \in X^*$ 与 $x \in X$, 函数 $z \to \ell(Q(z)x)$ 在 S 内解析；

(3) $Q(t)=\{Q(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是 C_0 半群，它的无穷小生成元为 $-A$.

那么 A 是 X 中的扇形算子.

证明 任取 $\ell\in X^*$, $x\in X$, $\lambda<a$. 记 $f(z)=\ell(Q(z)x)\mathrm{e}^{\lambda z}$, 其中 $z\in S$. 因为 f 解析，所以由 Cauchy 积分定理知

$$\int_\varepsilon^T f(t)\mathrm{d}t+\int_{T\to Tz} f(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_\varepsilon^T f(zt)z\mathrm{d}t+\int_{\varepsilon\to\varepsilon z} f(\xi)\mathrm{d}\xi,\qquad 0<\varepsilon<T,\ z\in S.$$

根据条件 (1), 可以在上式中，令 $T\to\infty$, $\varepsilon\to 0^+$, 于是

$$\int_0^\infty f(t)\mathrm{d}t=\int_0^\infty f(zt)z\mathrm{d}t.$$

由定理 3.2.2 知，对任意 $\ell\in X^*$ 和 $x\in X$, 有

$$\ell((A-\lambda I)^{-1}x)=z\int_0^\infty \ell(Q(zt)x)\mathrm{e}^{\lambda zt}\mathrm{d}t,\qquad z\in S,\ \lambda<a. \tag{3.25}$$

记 (3.25) 式的右端项为 $\mathcal{Q}(\lambda;z)$. 条件 (1) 说明，对每一个 $z\in S$, 在半平面 $\mathrm{Re}\{(\lambda-a)z\}<0$ 上 $\mathcal{Q}(\lambda;z)$ 是 λ 的解析函数. 由等式 (3.25) 知，对任意 $\lambda<a$, 都有 $\mathcal{Q}(\lambda;z)=\mathcal{Q}(\lambda;1)$. 因此在其公共定义域内， $\mathcal{Q}(\lambda;z)=\mathcal{Q}(\lambda;1)$ 成立. 从而存在 $z\in S$, 使得我们可以把 $\mathcal{Q}(\lambda;1)$ 延拓成在 $\mathrm{Re}\{(\lambda-a)z\}<0$ 中关于 λ 解析的函数. 区域 $\mathrm{Re}\{(\lambda-a)z\}<0$ 实际上就是 $|\arg(\lambda-a)|>\dfrac{\pi}{2}-\beta$. 此外，在此区域中还有下面的估计：

$$|\mathcal{Q}(\lambda;1)|\leqslant\inf_{z\in S}\frac{M|z|\cdot\|\ell\|\cdot\|x\|}{-\mathrm{Re}\{(\lambda-a)z\}}\leqslant\frac{M\|\ell\|\cdot\|x\|}{-|\lambda-a|\cos(|\arg(\lambda-a)|+\beta)}. \tag{3.26}$$

记 $\alpha=\inf\{\alpha\geqslant 0:|\arg(\lambda-a)|>\alpha\Longrightarrow\lambda\in\rho(A)\}$. 则由定理 3.2.2 知, $\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{2}$. 因为 $(A-\lambda I)^{-1}$ 解析，所以 $\ell((A-\lambda I)^{-1}x)=\mathcal{Q}(\lambda;1)$ 在扇形 $|\arg(\lambda-a)|>\max\left\{\alpha,\dfrac{\pi}{2}-\beta\right\}$ 内成立，并且由 (3.26) 式知，在这个扇形内还成立

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\|\leqslant\frac{M}{-|\lambda-a|\cos(|\arg(\lambda-a)|+\beta)}. \tag{3.27}$$

如果 $\alpha>\dfrac{\pi}{2}-\beta$, 那么由定理 2.1.10 推出，对于扇形 $|\arg(\lambda-a)|>\alpha$ 中的每一个点 λ, 以 $-|\lambda-a|\cos(\alpha+\beta)/M$ 为半径的圆盘都属于 $\rho(A)$. 这与 α 的定义相矛盾. 因此， $\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{2}-\beta$. 再由 (3.27) 式知，对每一个 $\theta\in\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 都存在 $M_\theta<\infty$, 使得 $A\in\mathcal{U}(a,M_\theta,\theta,X)$. 从而定理得证.

3.3.2 扇形算子的性质

引理 3.3.5 设 A 是扇形算子， $z \in \mathbb{C}$. 如果存在 $\lambda \in \mathbb{R}$, 使得直线 $\mathrm{Re}\, z = \lambda$ 属于 A 的预解集. 那么存在 $\delta > 0$, 使得带形区域 $|\lambda - \mathrm{Re}\, z| < \delta$ 也属于 A 的预解集.

证明 设 $A \in \mathcal{U}(a, M, \theta, X)$. 如果结论不成立，那么存在序列 $\{z_k\} \subset \sigma(A)$, 使得 $\mathrm{Re}\, z_k \to \lambda$. 因为 $|\mathrm{Im}\, z_k| \leqslant (\mathrm{Re}\, z_k - a)\tan\theta$, 所以存在 $\{z_k\}$ 的子列收敛于某个 z, 且有 $\mathrm{Re}\, z = \lambda$. 这是不可能的 (因为 $\sigma(A)$ 是闭的) . 这说明结论成立.

定理 3.3.6 设 A 是 X 中的扇形算子. 如果存在 $a \in \mathbb{R}$, 使得 $\mathrm{Re}\, \lambda > a$ 对所有 $\lambda \in \sigma(A)$ 成立. 则存在 $M > 0$ 与 $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, 使得 $A \in \mathcal{U}(a, M, \theta, X)$.

证明 因为 A 是 X 中的扇形算子，所以存在 $a_1 \in \mathbb{R}$, $M_1 > 0$ 及 $\theta_1 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, 使得 $A \in \mathcal{U}(a_1, M_1, \theta_1, X)$. 如果 $a \leqslant a_1$, 那么当 $|\arg(\lambda - a)| \geqslant \theta_1$ 时，就有

$$|\lambda - a_1| \geqslant |\lambda - a| \sin\theta_1.$$

因此， $A \in \mathcal{U}(a, M_1/\sin\theta_1, \theta_1, X)$.

如果 $a > a_1$, 那么由引理 3.3.5 知，存在 $b > a$, 使得 $\mathrm{Re}\, \lambda > b$ 对所有 $\lambda \in \sigma(A)$ 成立. 取 θ 满足 $(b - a)\tan\theta = (b - a_1)\tan\theta_1$, 则 $\theta > \theta_1$. 因为

$$S := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - a_1| \leqslant (b - a_1)/\cos\theta_1,\ \mathrm{Re}\, \lambda \leqslant b\right\} \subset \rho(A),$$

所以函数 $|\lambda - a| \cdot \|(A - \lambda I)^{-1}\|$ 在 S 上连续，故存在最大值，记为 C_1. 于是

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\| \leqslant \frac{C_1}{|\lambda - a|}, \qquad \lambda \in S.$$

如果 $\lambda \notin S$ 且 $|\arg(\lambda - a)| \geqslant \theta$, 那么

$$|\lambda - a_1| > \frac{b - a_1}{\cos\theta_1} > a - a_1, \qquad |\lambda - a| \leqslant |\lambda - a_1| + a - a_1 \leqslant 2|\lambda - a_1|.$$

取 $M = \max\{C_1, 2M_1\}$, 便得结论. 证毕.

定理 3.3.7 设 $A \in \mathcal{U}(a, M, \theta, X)$, $B : D(B) \to X$ 是线性算子. 如果 $D(B) \supset D(A)$, 并且

$$\|Bx\| \leqslant \varepsilon\|Ax\| + C\|x\|, \qquad \forall\, x \in D(A),$$

其中 $0 \leqslant \varepsilon < 1/(M + 1)$, C 是正常数. 那么 $A + B$ 是 X 中的扇形算子.

证明 取 $r > 0$, 使得

$$\mu := \varepsilon(1 + M) + M(\varepsilon|a| + C)/r < 1.$$

若 λ 满足 $|\lambda-a|\geqslant r$ 且 $|\arg(\lambda-a)|\geqslant\theta$, 则由定理 2.1.9 得

$$\begin{aligned}\|B(A-\lambda I)^{-1}\| &\leqslant \varepsilon\|A(A-\lambda I)^{-1}\|+C\|(A-\lambda I)^{-1}\|\\ &\leqslant \varepsilon(1+\|\lambda(A-\lambda I)^{-1}\|)+C\|(A-\lambda I)^{-1}\|\\ &\leqslant \varepsilon(1+M)+M(\varepsilon|a|+C)/|\lambda-a|\leqslant\mu,\\ (A+B-\lambda I)^{-1} &= (A-\lambda I)^{-1}(I+B(A-\lambda I)^{-1})^{-1},\\ \|(A+B-\lambda I)^{-1}\| &\leqslant \frac{M}{(1-\mu)|\lambda-a|}.\end{aligned}$$

易证，若 λ 满足 $\left|\arg\left(\lambda-\left(a-\dfrac{r}{\sin\theta}\right)\right)\right|\geqslant\theta$, 则 λ 一定满足

$$|\lambda-a|\geqslant r,\quad |\arg(\lambda-a)|\geqslant\theta \ \text{ 且 } \ |\lambda-a|\geqslant\left|\lambda-\left(a-\frac{r}{\sin\theta}\right)\right|\sin\theta.$$

因此

$$A+B\in\mathcal{U}\left(a-\frac{r}{\sin\theta},\,\frac{M}{(1-\mu)\sin\theta},\,\theta,\,X\right).$$

证毕.

对于 $b\in\mathbb{R}$, $\varphi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 我们在复平面 $\mathbb{C}$ 上按如下方式定义一条路径 $\gamma=\gamma(t)$：

$$\gamma(t)=b+|t|\cos\varphi-\mathrm{i}t\sin\varphi,\qquad t\in\mathbb{R}. \tag{3.28}$$

复平面:

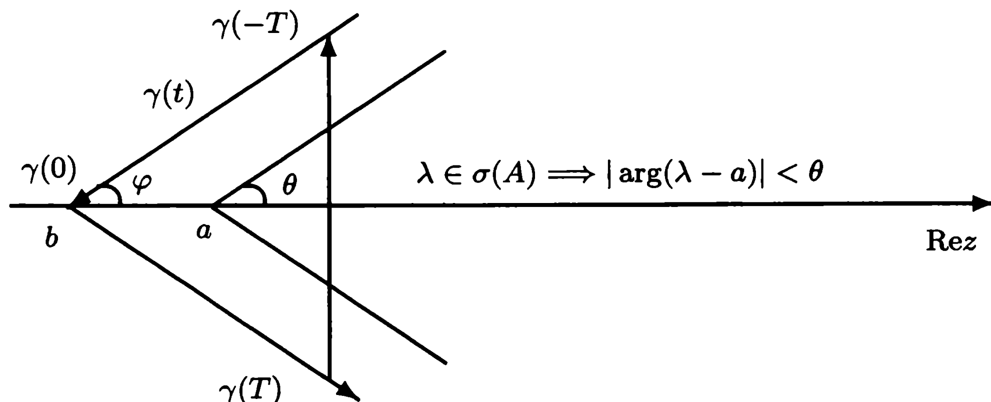


图 3.1 积分路径 γ

用 $\triangle_T$ 表示由 $\gamma(0)\to\gamma(T)\to\gamma(-T)\to\gamma(0)$ 构成的闭路径. 根据 Cauchy 积分公式，对任意多项式 P 以及任意的 $z\in\mathbb{C}$, 均有

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\Delta_T}\frac{P(\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda z}}{\lambda-\zeta}\mathrm{d}\lambda=\begin{cases}0, & \text{如果}\zeta\text{在}\Delta_T\text{的外部},\\ P(\zeta)\mathrm{e}^{-z\zeta}, & \text{如果}\zeta\text{在}\Delta_T\text{的内部}.\end{cases}\tag{3.29}$$

若 $z\neq 0$ 且 $\varphi+|\arg z|<\dfrac{\pi}{2}$, 则 $\mathrm{Re}\,z>0$, 并且成立

$$\mathrm{Re}(\gamma(t)z)\geqslant b\mathrm{Re}\,z+|tz|\cos(\varphi+|\arg z|),\qquad t\in\mathbb{R}.\tag{3.30}$$

这说明，可以在 (3.29) 式中取极限 $T\to\infty$. 从而得到，对于 $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\{b\}$, 有

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\mathbb{R}}\frac{P(\gamma(t))\mathrm{e}^{-\gamma(t)z}}{\gamma(t)-\zeta}\gamma'(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & \text{如果 }|\arg(\zeta-b)|>\varphi,\\ P(\zeta)\mathrm{e}^{-z\zeta}, & \text{如果 }|\arg(\zeta-b)|<\varphi.\end{cases}\tag{3.31}$$

这就启发我们给出下面的定义.

定义 3.3.5 对于 $A\in\mathcal{U}(a,M,\theta,X)$ 以及满足 $|\arg z|<\dfrac{\pi}{2}-\theta$ 的 $z\in\mathbb{C}$, 定义 $\mathrm{e}^{-zA}\in\mathcal{L}(X)$ 如下：当 $z=0$ 时， $\mathrm{e}^{-zA}=I$; 当 $z\neq 0$ 时,

$$\mathrm{e}^{-zA}=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\mathbb{R}}(\gamma(t)I-A)^{-1}\mathrm{e}^{-\gamma(t)z}\gamma'(t)\mathrm{d}t,\tag{3.32}$$

其中 $\gamma(t)$ 由 (3.28) 式给出 (参见图 3.1), 并要求 b 和 φ 满足

$$b<a,\qquad \varphi\in(\theta,\pi/2-|\arg z|).\tag{3.33}$$

为了说明这个定义的合理性，需要证明 (3.32) 式右端的积分收敛. 事实上，因为

$$|\gamma(t)-a|\geqslant(a-b)\sin\varphi,\qquad |\arg(\gamma(t)-a)|>\varphi>\theta,\tag{3.34}$$

所以对任意 $t\in\mathbb{R}$, 有 $\gamma(t)\in\rho(A)$. 此外，由于 (3.32) 式右端的被积函数在 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上连续，因而该被积函数强可测. 由此及 (3.30) 式推出

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\|(\gamma(t)I-A)^{-1}\mathrm{e}^{-\gamma(t)z}\gamma'(t)\|\mathrm{d}t&\leqslant\int_{\mathbb{R}}\frac{M}{|\gamma(t)-a|}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-b\mathrm{Re}\,z}}{\mathrm{e}^{|tz|\cos(\varphi+|\arg z|)}}|\gamma'(t)|\mathrm{d}t\\&\leqslant\frac{M\mathrm{e}^{-b\mathrm{Re}\,z}}{(a-b)\sin\varphi}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-|tz|\cos(\varphi+|\arg z|)}\mathrm{d}t\\&\leqslant\frac{2M\mathrm{e}^{-b\mathrm{Re}\,z}}{(a-b)|z|\sin\varphi\cos(\varphi+|\arg z|)}.\end{aligned}\tag{3.35}$$

这说明 (3.32) 式中的 Bochner 积分存在. 下面证明，(3.32) 式右端的积分值与 (3.33) 式中的 b 和 φ 的选取无关. 用 $I(b,\varphi)$ 表示 (3.32) 式右端的积分. 取 $\ell\in\mathcal{L}(X)^*$, 注意到

$$\ell(I(b,\varphi))=\int_{\gamma}f(\lambda)\mathrm{d}\lambda,$$

其中，$f(\lambda)=\ell((\lambda I-A)^{-1})\mathrm{e}^{-\lambda z}$, λ 满足 $|\arg(\lambda-a)|>\theta$. 对 $T>0$, 定义

$$E(T)=\ell(I(b,\varphi))-\int_{-T}^{T}f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

显然，当 $T\to\infty$ 时，$E(T)\to 0$. 取 $b_1<a$, $\varphi_1\in\left(\theta,\dfrac{\pi}{2}-|\arg z|\right)$. 用 γ_1 和 E_1 分别表示与之对应的 γ 和 E. 则由定理 2.1.10 知，f 是解析的. 利用 Cauchy 定理得

$$\ell(I(b,\varphi))-\ell(I(b_1,\varphi_1))=E(T)-E_1(T)-F(-T)+F(T),$$

其中

$$\begin{aligned}F(t)&=\int_{\gamma_1(t)\to\gamma(t)}f(\lambda)\mathrm{d}\lambda\\&=\int_0^1 f(s\gamma(t)+(1-s)\gamma_1(t))(\gamma(t)-\gamma_1(t))\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

注意到对充分大的 $|t|$, 有

$$|s\gamma(t)+(1-s)\gamma_1(t)-a|\geqslant 1,$$

于是由 (3.30) 式知

$$|f(s\gamma(t)+(1-s)\gamma_1(t))|\leqslant\|\ell\|M\exp(-C\mathrm{Re}\,z-|tz|\cos(\psi+|\arg z|)),$$

其中，$C=\min\{b,b_1\}$, $\psi=\max\{\varphi,\varphi_1\}$. 所以当 $|t|\to\infty$ 时，$F(t)\to 0$. 因而，$\ell(I(b_1,\varphi_1))=\ell(I(b,\varphi))$. 由于该等式对所有的 $\ell\in\mathcal{L}(X)^*$ 都成立，因此，$I(b,\varphi)$ 不依赖于 b 和 φ 的选取，换言之，e^{-zA} 不依赖于 b 和 φ 的选取. 从证明过程还可看出，它也不依赖于 θ 的选取. 所以，e^{-zA} 只依赖于 z 和扇形算子 A.

上面的讨论表明，在应用时我们可以根据需要在定义 3.3.5 中选取不同的积分路径.

不等式 (3.35) 的右端关于 $b<a$ 和 $\varphi\in\left(\theta,\dfrac{\pi}{2}-|\arg z|\right)$ 取极小便得到

定理 3.3.8 若 $A\in\mathcal{U}(a,M,\theta,X)$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 满足 $|\arg z|<\dfrac{\pi}{2}-\theta$, 则成立

$$\|\mathrm{e}^{-zA}\|\leqslant\inf_{\theta<\varphi<\frac{\pi}{2}-|\arg z|}\frac{\mathrm{e}M\cos(\arg z)}{\pi\sin\varphi\cos(\varphi+|\arg z|)}\mathrm{e}^{-a\mathrm{Re}\,z}.$$

由此及定理 3.3.6 我们有

推论 3.3.9 设 A 是扇形算子. 如果存在 $a\in\mathbb{R}$, 使得 $\mathrm{Re}\,\lambda>a$ 对所有 $\lambda\in\sigma(A)$ 成立. 那么存在 M 和 $\delta>0$, 使得

$$\|\mathrm{e}^{-zA}\|\leqslant M\mathrm{e}^{-a\mathrm{Re}\,z}$$

对所有满足 $|\arg z| < \delta$ 的 z 成立.

定理 3.3.10 设 $A \in \mathcal{U}(a, M, \theta, X)$. 若复数 z 和 w 满足: $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \theta$, $|\arg w| < \frac{\pi}{2} - \theta$, 则有 $\mathrm{e}^{-wA}\mathrm{e}^{-zA} = \mathrm{e}^{-(w+z)A}$.

证明 不妨假设 $z \neq 0, w \neq 0$. 记 $\alpha = \max\{|\arg z|, |\arg w|\}$. 选取 $b < a$, $\varphi \in (\theta, \frac{\pi}{2} - \alpha)$, 并定义

$$\gamma(t) = b + |t|\cos\varphi - \mathrm{i}t\sin\varphi, \quad \mu(t) = \gamma(t) + (a-b)/2, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

再任意选取 $\ell \in \mathcal{L}(X)^*$. 根据定义知

$$\begin{aligned}(2\pi\mathrm{i})^2\ell(\mathrm{e}^{-wA}\mathrm{e}^{-zA}) &= 2\pi\mathrm{i}\int_{\mathbb{R}} \ell(\mathrm{e}^{-wA}(\gamma(t)I - A)^{-1})\mathrm{e}^{-\gamma(t)z}\gamma'(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \ell((\mu(s)I - A)^{-1}(\gamma(t)I - A)^{-1})\mathrm{e}^{-\gamma(t)z-\mu(s)w}\gamma'(t)\mu'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

利用预解公式

$$(\mu I - A)^{-1} - (\gamma I - A)^{-1} = (\gamma - \mu)(\mu I - A)^{-1}(\gamma I - A)^{-1}$$

以及 Fubini 定理，可得

$$\begin{aligned}(2\pi\mathrm{i})^2\ell(\mathrm{e}^{-wA}\mathrm{e}^{-zA}) = &\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-\mu(s)w}\mu'(s)\mathrm{d}s}{\mu(s) - \gamma(t)}\right)\ell((\gamma(t)I - A)^{-1})\mathrm{e}^{-\gamma(t)z}\gamma'(t)\mathrm{d}t \\ &+ \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-\gamma(t)z}\gamma'(t)\mathrm{d}t}{\gamma(t) - \mu(s)}\right)\ell((\mu(s)I - A)^{-1})\mathrm{e}^{-\mu(s)w}\mu'(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

从而由 Cauchy 公式 (3.31) 和定义 3.3.5 就推出

$$\begin{aligned}(2\pi\mathrm{i})^2\ell(\mathrm{e}^{-wA}\mathrm{e}^{-zA}) &= 2\pi\mathrm{i}\int_{\mathbb{R}} \ell((\mu(s)I - A)^{-1})\mathrm{e}^{-\mu(s)(w+z)}\mu'(s)\mathrm{d}s \\ &= (2\pi\mathrm{i})^2\ell(\mathrm{e}^{-(w+z)A}).\end{aligned}$$

因为该等式对所有 $\ell \in \mathcal{L}(X)^*$ 成立，所以 $\mathrm{e}^{-wA}\mathrm{e}^{-zA} = \mathrm{e}^{-(w+z)A}$. 证毕.

上述定理给出了 e^{-zA} 的半群性质. 下面的定理论述 e^{-zA} 的解析性.

定理 3.3.11 设 $A \in \mathcal{U}(a, M, \theta, X)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 满足 $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \theta$, 那么对 $n \geqslant 0$, 有

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^n \mathrm{e}^{-zA} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathbb{R}} (-\gamma(t))^n(\gamma(t)I - A)^{-1}\mathrm{e}^{-\gamma(t)z}\gamma'(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $\gamma(t)$ 的取法同于定义 3.3.5.

证明 显然，右端的积分存在，记为 $I_n(z)$. 如果 $h\in\mathbb{C}$ 满足 $|h|<|z|\cos(\varphi+|\arg z|)$, 那么

$$\varphi+|\arg(z+h)|<\frac{\pi}{2},\ \text{且}\ z+h\neq 0.$$

因此这个路径 γ 可用于计算 $I_n(z+h)$. 根据

$$\begin{aligned}&|\mathrm{e}^{-\gamma(t)(z+h)}-\mathrm{e}^{-\gamma(t)z}+h\gamma(t)\mathrm{e}^{-\gamma(t)z}|\\ \leqslant\ &|h\gamma(t)|^2\exp\{-b\mathrm{Re}\,z+|bh|-|tz|\cos(\varphi+|\arg z|)+|th|\},\end{aligned}$$

可推知

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{1}{h}(I_n(z+h)-I_n(z))-I_{n+1}(z)\right\|=0.$$

故结论成立.

定理 3.3.12 设 $A\in\mathcal{U}(a,M,\theta,X)$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 满足 $|\arg z|<\dfrac{\pi}{2}-\theta$. 那么对任意 $n\geqslant 0$, 有

(1) e^{-zA} 的值域属于 $D(A^n)$;

(2) $A^n\mathrm{e}^{-zA}=\left(-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^n\mathrm{e}^{-zA}$;

(3) $A^n\mathrm{e}^{-zA}x=\mathrm{e}^{-zA}A^nx$ 对所有 $x\in D(A^n)$ 成立.

证明 当 $n=0$ 时, 结论 (1) 和 (2) 显然成立. 假设结论 (1) 和 (2) 对某个 $n\geqslant 0$ 成立, 那么由定理 3.3.11 知, 对任意 $x\in X$, 有

$$A^n\mathrm{e}^{-zA}x=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathbb{R}}\gamma^n(t)(\gamma(t)I-A)^{-1}x\mathrm{e}^{-\gamma(t)z}\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

因为 A 是闭的, 且 $A(\gamma(t)I-A)^{-1}x=-x+\gamma(t)(\gamma(t)I-A)^{-1}x$, 所以根据命题 1.2.11 知, $A^n\mathrm{e}^{-zA}x\in D(A)$ 且

$$A^{n+1}\mathrm{e}^{-zA}x=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathbb{R}}\gamma^n(t)[-x+\gamma(t)(\gamma(t)I-A)^{-1}x]\mathrm{e}^{-\gamma(t)z}\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

利用 Cauchy 定理又知

$$A^{n+1}\mathrm{e}^{-zA}x=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathbb{R}}\gamma^{n+1}(t)(\gamma(t)I-A)^{-1}x\mathrm{e}^{-\gamma(t)z}\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

这说明结论 (1) 和 (2) 对 $n+1$ 也成立. 因此, 结论 (1) 和 (2) 对任意 $n\geqslant 0$ 都成立.

假设结论 (3) 对某个 $n\geqslant 0$ 成立, 则当 $x\in D(A^n)$ 时, 有

$$A^n\mathrm{e}^{-zA}x=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathbb{R}}(\gamma(t)I-A)^{-1}A^nx\mathrm{e}^{-\gamma(t)z}\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

如果 $x \in D(A^{n+1})$, 那么命题 1.2.11 说明，结论 (3) 对 $n+1$ 成立. 故结论 (3) 对任意 $n \geqslant 0$ 都成立. 证毕.

定理 3.3.13 设 $A \in \mathcal{U}(a, M, \theta, X)$, $\varepsilon \in \left(0, \frac{\pi}{2} - \theta\right)$. 定义

$$S = \left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \frac{\pi}{2} - \theta - \varepsilon\right\}.$$

那么

(1) $\lim\limits_{\substack{z \in S \\ z \to 0}} \|\mathrm{e}^{-zA}x - x\| = 0$ 对所有 $x \in X$ 成立;

(2) $\lim\limits_{\substack{z \in S \\ z \to 0}} \|\frac{1}{z}(x - \mathrm{e}^{-zA}x) - Ax\| = 0$ 对所有 $x \in D(A)$ 成立;

(3) $\{\mathrm{e}^{-tA}\}_{t \geqslant 0}$ 是 C_0 半群，其无穷小生成元为 $-A$.

证明 任意选取 $y \in D(A)$, $z \in S$. 取 $\gamma(t)$ 同于定义 3.3.5, 并要求 $\theta < \varphi < \frac{\pi}{2} - |\arg z| - \varepsilon$. 根据定义 3.3.5 得

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-zA}y - \mathrm{e}^{-za}y &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\mathbb{R}} [(\gamma(t)I - A)^{-1}y - (\gamma(t) - a)^{-1}y] \mathrm{e}^{-\gamma(t)z} \gamma'(t) \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\mathbb{R}} (\gamma(t) - a)^{-1} (\gamma(t)I - A)^{-1} (Ay - ay) \mathrm{e}^{-\gamma(t)z} \gamma'(t) \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

对于 $b = a - 1/|z|$, 令 $\varphi \to \theta$, 利用 (3.34) 式和 (3.30) 式可推出

$$\|\mathrm{e}^{-zA}y - \mathrm{e}^{-za}y\| \leqslant |z| \frac{\mathrm{e}M\|Ay - ay\|}{\pi \sin^2\theta \sin\varepsilon} \mathrm{e}^{-a\mathrm{Re}\, z}. \tag{3.36}$$

注意到对任意 $x \in X$, 有

$$\begin{aligned} \|\mathrm{e}^{-zA}x - x\| \leqslant{}& \|\mathrm{e}^{-zA}y - \mathrm{e}^{-za}y\| + |\mathrm{e}^{-za} - 1| \cdot \|y\| \\ &+ \|\mathrm{e}^{-zA} - I\| \cdot \|x - y\|, \end{aligned} \tag{3.37}$$

并且 $D(A)$ 在 X 中稠，所以由 (3.36) 式、 (3.37) 式以及定理 3.3.8 可推知，结论 (1) 成立.

接下来证明结论 (2) . 对于 $z \in S$, $x \in D(A)$, 由定理 3.3.12 可知, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-tzA}x = -z\mathrm{e}^{-tzA}Ax$. 因而由结论 (1) 以及定理 1.2.15 的结论 (1) 得

$$x - \mathrm{e}^{-zA}x = z\int_0^1 \mathrm{e}^{-tzA}Ax\mathrm{d}t,$$

$$\frac{1}{z}(x - \mathrm{e}^{-zA}x) - Ax = \int_0^1 (\mathrm{e}^{-tzA}Ax - Ax)\mathrm{d}t.$$

由此及结论 (1) 可推出结论 (2) .

现在证明结论 (3)．显然，$\{e^{-tA}\}_{t\geqslant 0}$ 是 C_0 半群．如果 $-B$ 是半群 $\{e^{-tA}\}_{t\geqslant 0}$ 的无穷小生成元，那么结论 (2) 说明，B 是 A 的延拓．另一方面，由定义 3.3.1 和定理 3.2.2 知，$a-1\in\rho(A)\cap\rho(B)$．再利用命题 2.1.12 知，$A=B$．结论 (3) 成立．证毕．

定理 3.3.13 表明，如果 A 是扇形算子，那么 e^{-zA} 是解析半群并且 $-A$ 是它的无穷小生成元．定理 3.3.4 说明，如果 $Q(z)$ 是解析半群，$-A$ 是它的无穷小生成元，那么 A 是扇形算子且有 $Q(z)=e^{-zA}$．

我们经常要用到下述定理所给出的有关 Ae^{-zA} 的界的估计．

定理 3.3.14 设 $A\in\mathcal{U}(a,M,\theta,X)$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 满足 $|\arg z|<\dfrac{\pi}{2}-\theta$, 则

$$\|(A-a)e^{-zA}\|\leqslant\frac{M}{\pi\cos(\theta+|\arg z|)}\cdot\frac{e^{-a\mathrm{Re}\,z}}{|z|}.$$

证明 根据定理 3.3.11 和定理 3.3.12 以及定义 3.3.5 中 $\gamma(t)$ 的取法，我们有

$$(A-aI)e^{-zA}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathbb{R}}(\gamma(t)-a)(\gamma(t)I-A)^{-1}e^{-\gamma(t)z}\gamma'(t)\mathrm{d}t,$$

$$\|(A-aI)e^{-zA}\|\leqslant\frac{M}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}|e^{-\gamma(t)z}|\mathrm{d}t\leqslant\frac{M}{\pi|z|\cos(\varphi+|\arg z|)}e^{-b\mathrm{Re}\,z}.$$

在上式中令 $b\to a$, $\varphi\to\theta$, 就得到所需要的界．证毕．

推论 3.3.15 设 A 是扇形算子，$\tau\in(0,\infty)$, 则存在正常数 $C=C(\tau)$, 使得

$$\|Ae^{-tA}\|\leqslant Ct^{-1},\qquad 0<t\leqslant\tau,\tag{3.38}$$

$$\|e^{-tA}-e^{-sA}\|\leqslant Cs^{-1}(t-s),\qquad 0<s\leqslant t\leqslant\tau,\tag{3.39}$$

$$\|Ae^{-tA}-Ae^{-sA}\|\leqslant Ct^{-1}s^{-1}(t-s),\qquad 0<s\leqslant t\leqslant\tau.\tag{3.40}$$

证明 由定理 3.3.8 和定理 3.3.14 可得 (3.38) 式．利用定理 3.3.12 知

$$\|e^{-tA}-e^{-sA}\|\leqslant\int_s^t\|Ae^{-rA}\|\mathrm{d}r.$$

从而由 (3.38) 式可推出 (3.39) 式．又因为

$$\|Ae^{-tA}-Ae^{-sA}\|\leqslant\int_s^t\|A^2e^{-rA}\|\mathrm{d}r\leqslant\int_s^t\|Ae^{-rA/2}\|^2\mathrm{d}r,$$

所以，利用 (3.38) 式就得到 (3.40) 式．证毕．

§3.4 由微分算子确定的半群

根据定理 3.2.8 知， 2.5 节给出的微分算子是某个与之对应的收缩半群的无穷小生成元. 下面，我们讨论一类高阶微分算子并证明它们都是扇形算子.

设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界光滑区域. 考察 $2m$ 阶微分算子:

$$A(x,D)=-\sum_{|\alpha|\leqslant 2m}a_\alpha(x)D^\alpha,$$

其中系数 $a_\alpha(x)$ 是定义在 $\bar{\Omega}$ 上的适当光滑的复值函数. $A(x,D)$ 的主部 $A'(x,D)$ 是

$$A'(x,D)=-\sum_{|\alpha|=2m}a_\alpha(x)D^\alpha.$$

定义 3.4.1 称算子 $-A(x,D)$ 为 **强椭圆的**，如果存在正常数 C, 使得

$$-\mathrm{Re}\,\{(-1)^mA'(x,\xi)\}\geqslant C|\xi|^{2m},\qquad \forall\, x\in\bar{\Omega},\ \xi\in\mathbb{R}^N,$$

其中 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_N)$, $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_N)\in\mathbb{N}^N$, $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_N^{\alpha_N}$.

本节总假设 $-A(x,D)$ 是强椭圆算子. 我们引入算子 $A(x,D)$ 的形式共轭算子:

$$A^*(x,D)u=-\sum_{|\alpha|\leqslant 2m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(\overline{a_\alpha(x)}\,u).$$

设 $1<p<\infty$, 在 $L^p(\Omega)$ 中定义算子 A_p :

$$D(A_p)=W^{2m,p}(\Omega)\cap W_0^{m,p}(\Omega),$$

$$A_pu=A(x,D)u,\qquad u\in D(A_p).$$

对于 $q=p/(p-1)$, 在 $L^q(\Omega)$ 中类似地定义算子 A_q^* :

$$D(A_q^*)=W^{2m,q}(\Omega)\cap W_0^{m,q}(\Omega),$$

$$A_q^*u=A^*(x,D)u,\qquad u\in D(A_q^*).$$

我们将证明 A_p 是扇形算子. 为此，首先给出一个定理，用于判断一个算子是否为扇形算子.

定理 3.4.1 设 B 是 Banach 空间 X 上的闭稠定线性算子，记 B^* 是 B 的共轭算子. 如果存在 $R_0, C>0$, $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 使得对任意 $\lambda\in\mathcal{S}_\theta:=\{\lambda\in\mathbb{C}:\ |\lambda|>$

$R_0, |\arg\lambda| \geqslant \theta\}$, 均有

$$\|u\| \leqslant \frac{C}{|\lambda|}\|(\lambda I - B)u\|, \qquad \forall\, u \in D(B), \tag{3.41}$$

并且方程 $(\bar{\lambda} I - B^*)v = 0$ 只有零解. 那么 B 是扇形算子.

在证明定理 3.4.1 之前，我们先论述一个引理.

引理 3.4.2 假设 A 是 Banach 空间 X 上的闭稠定线性算子. 如果方程 $A^*v = 0$ 只有零解，那么 A 的值域 $\mathcal{R}(A)$ 在 X 中是稠的.

证明 首先，$\mathcal{R}(A)$ 是 X 的线性子空间. 如果 $\mathcal{R}(A)$ 在 X 中不是稠的，那么存在 $x_0 \in X$, 使得 $d = \rho(x_0, \mathcal{R}(A)) > 0$. 由 Hahn–Banach 定理知，存在 $f \in X^*$, 使得

$$f(x_0) = d, \quad \|f\| = 1, \quad 且\ f(x) = 0, \qquad \forall\, x \in \mathcal{R}(A).$$

因此，$\langle A^*f, x\rangle = \langle f, Ax\rangle = 0$ 对所有 $x \in D(A)$ 成立. 因为 $\overline{D(A)} = X$, 且 f 连续，所以对任意 $x \in X$, 均有 $\langle A^*f, x\rangle = 0$. 从而，$A^*f = 0$. 因为 $A^*v = 0$ 只有零解，所以 $f = 0$. 矛盾.

定理 3.4.1 的证明 首先说明 $\mathcal{R}(\lambda I - B) = X$. 因为 $\lambda I - B$ 是闭的，并且方程 $(\lambda I - B)^*v = (\bar{\lambda} I - B^*)v = 0$ 只有零解，所以由引理 3.4.2 知，$\mathcal{R}(\lambda I - B)$ 在 X 中稠. 如果能够证明 $\mathcal{R}(\lambda I - B)$ 是闭的，那么就有 $\mathcal{R}(\lambda I - B) = X$. 设 $v_n \in \mathcal{R}(\lambda I - B)$, $v_n \to v$. 则存在 $u_n \in D(B)$, 使得 $(\lambda I - B)u_n = v_n$. 由 (3.41) 式知，$\|u_n - u_m\| \leqslant \dfrac{C}{|\lambda|}\|v_n - v_m\|$, 即 $\{u_n\}$ 是一个 Cauchy 列. 从而存在 $u \in X$, 使得 $u_n \to u$. 又因为 $\lambda I - B$ 是闭的，所以 $u \in D(B)$ 且 $v = (\lambda I - B)u$, 即 $v \in \mathcal{R}(\lambda I - B)$. 这表明 $\mathcal{R}(\lambda I - B)$ 是闭的.

再根据 (3.41) 式知，若 $\lambda \in \mathcal{S}_\theta$, 则 $(\lambda I - B)^{-1}$ 存在，并且

$$\|(\lambda I - B)^{-1}u\| \leqslant \frac{C}{|\lambda|}\|u\|, \quad \forall\, u \in D((\lambda I - B)^{-1}) = \mathcal{R}(\lambda I - B) = X,$$

即

$$\|(\lambda I - B)^{-1}\| \leqslant \frac{C}{|\lambda|}.$$

显然，存在 $a \in \mathbb{R}$, 使得

$$\mathcal{S}_{a,\theta} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a)| \geqslant \theta\} \subset \mathcal{S}_\theta.$$

于是当 $\lambda \in \mathcal{S}_{a,\theta}$ 时，我们有

$$\|(\lambda I - B)^{-1}\| \leqslant \frac{C}{|\lambda|} = \frac{C}{|\lambda - a|} \times \frac{|\lambda - a|}{|\lambda|} \leqslant \frac{M}{|\lambda - a|}.$$

定理 3.4.1 得证.

为了应用定理 3.4.1, 首先叙述关于椭圆型方程解的先验估计的几个结果, 其证明可以参见 S. Agmon [2] .

命题 3.4.3 设 $1 < p < \infty$, 则存在正常数 C, 使得

$$\|u\|_{2m,p} \leqslant C(\|A_p u\|_p + \|u\|_p), \qquad \forall\, u \in W^{2m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega).$$

命题 3.4.4 设 $1 < p < \infty$, 则存在正常数 C, R 以及 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, 使得对任意满足 $|\lambda| \geqslant R$ 且 $|\arg\lambda| \geqslant \theta$ 的复数 λ, 下面的估计成立:

$$\|u\|_p \leqslant \frac{C}{|\lambda|}\|(\lambda I - A_p)u\|_p, \qquad \forall\, u \in W^{2m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega).$$

下面证明 A_p 是闭的, 且 A_q^* 是 A_p 的共轭算子.

引理 3.4.5 若 $1 < p < \infty$, 则 A_p 在 $L^p(\Omega)$ 上是闭稠定的.

证明 因为 $C_0^\infty(\Omega) \subset D(A_p)$, $\overline{C_0^\infty(\Omega)} = L^p(\Omega)$, 所以 $\overline{D(A_p)} = L^p(\Omega)$, 从而 A_p 是稠定的.

接下来说明 A_p 是闭算子. 设 $u_n \in D(A_p)$, 在 $L^p(\Omega)$ 中 $u_n \to u$, $A_p u_n \to v$. 根据命题 3.4.3, 可得

$$\begin{aligned}\|u_n - u_k\|_{m,p} &\leqslant \|u_n - u_k\|_{2m,p} \\ &\leqslant C(\|A_p(u_n - u_k)\|_p + \|u_n - u_k\|_p) \to 0.\end{aligned}$$

由极限的唯一性知, $u_n \to u$ 在 $W^{2m,p}(\Omega)$ 和 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 中都成立, 从而 $u \in D(A_p)$. 因为 $\|A_p(u_n - u)\|_p \leqslant M\|u_n - u\|_{2m,p} \to 0$, 所以 $A_p u = v$. 故 A_p 是闭的.

引理 3.4.6 若 $1 < p < \infty$, 则 A_q^* 是 A_p 的共轭算子.

证明 令 A_p 的共轭算子为 $(A_p)^*$. 分部积分得

$$\langle A_p u, v\rangle = \langle u, A_q^* v\rangle, \qquad \forall\, u \in D(A_p),\ v \in D(A_q^*). \tag{3.42}$$

所以, $D(A_q^*) \subset D((A_p)^*)$, 并且对于 $v \in D(A_q^*)$, 有 $A_q^* v = (A_p)^* v$.

设 $v \in D((A_p)^*)$, $w = (A_p)^* v$. 那么 $v \in L^q(\Omega)$, 且

$$\langle A_p u, v\rangle = \langle u, w\rangle, \qquad \forall\, u \in D(A_p). \tag{3.43}$$

由于 $\overline{D(A_q^*)} = L^q(\Omega)$, 因此存在 $v_n \in D(A_q^*)$, 使得 $\|v_n - v\|_q \to 0$. 从而 $\langle A_p u, v_n\rangle \to \langle A_p u, v\rangle$. 该事实结合 (3.42) 式与 (3.43) 式, 就可推出

$$\langle u, A_q^* v_n\rangle = \langle A_p u, v_n\rangle \to \langle A_p u, v\rangle = \langle u, w\rangle, \qquad \forall\, u \in D(A_p). \tag{3.44}$$

又因为 $\overline{D(A_p)} = L^p(\Omega)$, 所以由 (3.44) 式知, $A_q^* v_n \rightharpoonup w$. 由于 A_q^* 是闭的, 所以 $v \in D(A_q^*)$, 即 $D((A_p)^*) \subset D(A_q^*)$. 这就证明了 $(A_p)^* = A_q^*$.

最后证明如下结论.

定理 3.4.7 设 $1 < p < \infty$, 则 A_p 是 $X = L^p(\Omega)$ 上的扇形算子, 并且 $-A_p$ 是某个解析半群的无穷小生成元.

证明 由引理 3.4.5 和引理 3.4.6 知, A_p 在 $L^p(\Omega)$ 上是闭稠定的, 并且 $(A_p)^* = A_q^*$. 将命题 3.4.4 分别应用于 A_p 和 A_q^* 就推出, 存在 $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 与正常数 R, C, 使得对任意满足 $|\lambda| \geqslant R$ 和 $|\arg\lambda| \geqslant \theta$ 的 λ, 有

$$\|u\|_p \leqslant C|\lambda|^{-1}\|(\lambda I - A_p)u\|_p, \quad \forall\, u \in D(A_p),$$

$$\|v\|_q \leqslant C|\lambda|^{-1}\|(\bar{\lambda} I - A_q^*)v\|_q, \quad \forall\, v \in D(A_q^*).$$

第二个不等式说明, 方程 $(\bar{\lambda} I - (A_p)^*)v = 0$ 只有零解. 由定理 3.4.1 知, A_p 是扇形算子.

§3.5 非齐次问题

本节的目的, 是寻找一个连续函数 $u: [0,T) \to X$ 满足

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t), & t \in (0,T), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{3.45}$$

本节总假定:

(1) X 是 Banach 空间, $u_0 \in X$;

(2) $-A$ 是 X 上的 C_0 半群 $Q(t)$ 的无穷小生成元;

(3) $0 < T < \infty$, $f \in L^1((0,t), X)$ 对所有 $t \in (0,T)$ 成立.

对于 A 是扇形算子的情形, 我们将在 7.3 节中作详细讨论.

定义 3.5.1 函数 $u: [0,T) \to X$ 称为是初值问题 (3.45) 在 $[0,T)$ 上的 **古典解**, 如果 u 在 $[0,T)$ 上连续、在 $(0,T)$ 内连续可微, 对任意 $0 < t < T$ 有 $u(t) \in D(A)$, 并且在 $(0,T)$ 内 u 满足 (3.45) .

定义 3.5.2 在 $[0,T)$ 上几乎处处可微并且满足 $u' \in L^1((0,T), X)$ 的函数 u 称为初值问题 (3.45) 的 **强解**, 如果 $u(0) = u_0$, 且 $u'(t) + Au(t) = f(t)$ 在 $[0,T]$ 上几乎处处成立.

定理 3.5.1 设 $u \in C([0,T), X)$ 且满足初值问题 (3.45), 则

$$u(t) = Q(t)u_0 + \int_0^t Q(t-s)f(s)\mathrm{d}s, \qquad \forall\, t \in [0,T). \tag{3.46}$$

证明 因为 u 满足初值问题 (3.45), 所以对任意 $t>0$, 有 $u(t)\in D(A)$. 取 $t\in(0,T)$, 并记 $v(s)=Q(t-s)u(s)$, 其中 $0<s\leqslant t$. 如果 s, $s+h\in(0,T]$, $h\neq 0$, 那么由定理 3.2.1 得

$$\begin{aligned}\frac{v(s+h)-v(s)}{h} &= \frac{Q(t-s-h)-Q(t-s)}{h}u(s)+Q(t-s-h)u'(s)\\ &\quad +Q(t-s-h)\left(\frac{u(s+h)-u(s)}{h}-u'(s)\right)\\ &\xrightarrow{h\to 0} AQ(t-s)u(s)+Q(t-s)u'(s)\\ &= Q(t-s)f(s),\end{aligned}$$

即 $v'(s)=Q(t-s)f(s)$. 从 0 到 t 积分此方程，并利用 $\lim\limits_{s\to 0}v(s)=Q(t)u_0$ 和定理 1.2.15, 便推出 (3.46) 式.

定理 3.5.1 说明，初值问题 (3.45) 的古典解一定满足 (3.46) 式. 一个自然的想法是，可否借助于 (3.46) 式定义的函数 u 来研究初值问题 (3.45) 的可解性呢？为此，首先要证明 (3.46) 式中的 Bochner 积分存在.

引理 3.5.2 对任意 $t\in[0,T)$, Bochner 积分 $F(t):=\displaystyle\int_0^t Q(t-s)f(s)\mathrm{d}s$ 存在. 此外, $F\in C([0,T),X)$.

证明 因为对任意 $t\in(0,T)$, 有 $f\in L^1((0,t),X)$, 所以 Bochner 积分 $F(t):=\displaystyle\int_0^t Q(t-s)f(s)\mathrm{d}s$ 存在. 对任意 $t\in[0,T)$ 和 $0<h\ll 1$, 有

$$\begin{aligned}F(t+h)-F(t) &= \int_0^{t+h}Q(t+h-s)f(s)\mathrm{d}s-\int_0^t Q(t-s)f(s)\mathrm{d}s\\ &= (Q(h)-I)\int_0^t Q(t-s)f(s)\mathrm{d}s+\int_t^{t+h}Q(t+h-s)f(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由此推出

$$\lim_{h\to 0^+}[F(t+h)-F(t)]=0.$$

对任意 $t\in(0,T)$ 和 $h<0$, $|h|\ll 1$, 根据

$$F(t+h)-F(t)=-[Q(-h)-I]\int_0^{t+h}Q(t+h-s)f(s)\mathrm{d}s-\int_{t+h}^t Q(t-s)f(s)\mathrm{d}s$$

知

$$\lim_{h\to 0^-}[F(t+h)-F(t)]=0.$$

故 $F\in C([0,T),X)$. 证毕.

定义 3.5.3 设 $-A$ 是 C_0 半群 $Q(t)$ 的无穷小生成元， $u_0 \in X$. 称 (3.46) 式所定义的函数 $u \in C([0,T),X)$ 为初值问题 (3.45) 在 $[0,T]$ 上的 **适度解**.

由引理 3.5.2 知，只要 $f \in L^1((0,t),X)$ 对所有 $t \in (0,T)$ 成立，那么初值问题 (3.45) 的适度解一定存在. 然而，即使 $f \equiv 0$, 适度解也不一定可微，适度解的值也不一定属于 A 的定义域. 因此适度解不一定是真正的解. 然而，如果初值问题 (3.45) 有真正的解，那么真正的解一定是适度解 (定理 3.5.1). 下面的定理 3.5.3 推广了定理 3.2.1 的结论 (3), 并且说明了适度解在平均意义下满足 (3.45) 式.

定理 3.5.3 (唯一性) 初值问题 (3.45) 的适度解 u 就是满足 $\int_0^t u(s)\mathrm{d}s \in D(A)$ 和

$$u(t) - u_0 + A\int_0^t u(s)\mathrm{d}s = \int_0^t f(s)\mathrm{d}s, \qquad \forall\, t \in [0,T) \tag{3.47}$$

的唯一连续函数 $u \in C([0,T), X)$.

证明 设 u 由 (3.46) 式给出. 注意到当 $t \in [0,T)$ 时，有

$$\begin{aligned}\int_0^t u(r)\mathrm{d}r &= \int_0^t Q(r)u_0\mathrm{d}r + \int_0^t \mathrm{d}r\int_0^r Q(r-s)f(s)\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t Q(r)u_0\mathrm{d}r + \int_0^t \mathrm{d}s\int_s^t Q(r-s)f(s)\mathrm{d}r \\ &= \int_0^t Q(r)u_0\mathrm{d}r + \int_0^t \mathrm{d}s\int_0^{t-s} Q(r)f(s)\mathrm{d}r,\end{aligned}$$

由定理 3.2.1 的结论 (3) 和命题 1.2.11 推出， $\int_0^t u(r)\mathrm{d}r \in D(A)$, 并且

$$\begin{aligned}A\int_0^t u(r)\mathrm{d}r &= u_0 - Q(t)u_0 + \int_0^t [f(s) - Q(t-s)f(s)]\mathrm{d}s \\ &= u_0 - u(t) + \int_0^t f(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

从而，初值问题 (3.45) 的适度解满足 (3.47) 式.

如果 v 是问题 (3.47) 的连续解，记 $w(t) = \int_0^t (v(s) - u(s))\mathrm{d}s$, 则有 $w' + Aw = 0$, $w(0) = 0$. 因此，由定理 3.2.1 的结论 (7) 知， $w \equiv 0$, 即 $v \equiv u$. 证毕.

以下两个推论论证了古典解的存在性.

推论 3.5.4 设 $u_0 \in D(A)$. 若存在 $x \in X$ 与 $g \in L^1((0,T),X)$, 使得 $f(t)$ 可以表示成

$$f(t) = x + \int_0^t g(s)\mathrm{d}s, \qquad \forall\, t \in (0,T).$$

则初值问题 (3.45) 有解 $u \in C^1([0,T),X)$.

证明 首先，由定理 3.5.3 知，下面的积分方程有唯一解 $v \in C([0,T),X)$：

$$v(t) + Au_0 - x + A\int_0^t v(s)\mathrm{d}s = \int_0^t g(s)\mathrm{d}s, \qquad \forall\, t \in [0,T).$$

取 $u(t) = u_0 + \int_0^t v(s)\mathrm{d}s$, 即知结论成立. 证毕.

一般来说，在上面的推论中不能把 f 的条件减弱成 $f \in C([0,T),X)$.

推论 3.5.5 如果 $u_0 \in D(A)$ 且 $f \in C([0,T),X) \cap L^1((0,T),D(A))$, 那么初值问题 (3.45) 有解 $u \in C([0,T),D(A)) \cap C^1([0,T),X)$.

证明 从定理 3.2.1 的结论 (3) 和结论 (4), 以及命题 1.2.11 可以看出, 由 (3.46) 式所确定的适度解 $u \in D(A)$, 并且满足

$$Au(t) = Q(t)Au_0 + \int_0^t Q(t-s)Af(s)\mathrm{d}s.$$

于是由引理 3.5.2 知， $Au \in C([0,T),X)$. 从而 $A\int_0^t u(s)\mathrm{d}s = \int_0^t Au(s)\mathrm{d}s$. 因此可以对 (3.47) 式两端进行微分，微分后所得结论即为所求. 证毕.

下面的推论给出了 **强解** 的存在性.

推论 3.5.6 设 $u_0 \in X$, $f \in L^1((0,T),X)$ 且 $u \in L^1((0,T),X)$. 又设 $u \in L^1((0,T),D(A))$, 或者 $u \in W^{1,1}((0,T),X)$. 那么 u 是初值问题 (3.45) 的适度解, 即 u 满足 (3.46) 式，当且仅当 u 满足

$$\begin{cases} u \in L^1((0,T),D(A)) \cap W^{1,1}((0,T),X), \\ u'(t) + Au(t) = f(t), \qquad \text{a.e.} \quad t \in [0,T], \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{3.48}$$

证明 首先假设 u 满足 (3.46) 式. 则由定理 3.5.3 知， u 满足 (3.47) 式. 如果 $u \in L^1((0,T),D(A))$, 那么由命题 1.2.11 可知， $\int_0^t u(s)\mathrm{d}s \in D(A)$ 且 $A\int_0^t u(s)\mathrm{d}s = \int_0^t Au(s)\mathrm{d}s$. 于是， (3.47) 式等价于

$$u(t) - u_0 + \int_0^t Au(s)\mathrm{d}s = \int_0^t f(s)\mathrm{d}s, \qquad \forall\, t \in [0,T).$$

因为 Au, $f \in L^1((0,T),X)$, 所以由定理 1.2.21 知， u 几乎处处可微. 从而 (3.48) 式的第二个方程成立. 因此， $u \in W^{1,1}((0,T),X)$. 进而又有 $u \in C([0,T),X)$, 并且条件 $u(0) = u_0$ 有意义. 如果 $u \in W^{1,1}((0,T),X)$, 那么由 (3.47) 式知，函数

$$F(t) = A\int_0^t u(s)\mathrm{d}s \in W^{1,1}((0,T),X).$$

因为 A 是闭的，且当 $h \to 0$ 时，$\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_t^{t+h} u(s)\mathrm{d}s \to u(t)$, 所以根据

$$A\left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} u(s)\mathrm{d}s\right) = \frac{F(t+h)-F(t)}{h} \xrightarrow{h\to 0} F'(t), \qquad \text{a.e.} \quad t\in[0,T],$$

可推知，$u(t) \in D(A)$, 且 $F'(t) = Au(t)$ 在 $[0,T]$ 上几乎处处成立. 由此及 (3.47) 式知, (3.48) 式的第二个方程成立. 由于 u', $f \in L^1((0,T),X)$, 因此 $u \in L^1((0,T),D(A))$.

反之，假设 (3.48) 式成立. 类似于定理 3.5.1 的证明便可推出，u 满足 (3.46) 式. 证毕.

下述定理给出了古典解的存在性.

定理 3.5.7 设 $u_0 \in D(A)$, $f \in C([0,T], X)$, u 由 (3.46) 式给出. 如果下列条件之一成立：

(1) $f \in L^1((0,T),D(A))$;

(2) $f \in W^{1,1}((0,T),X)$.

那么 $u \in C([0,T],D(A)) \cap C^1([0,T],X)$, 并且满足初值问题 (3.45) . 这说明 u 是古典解.

证明 证明分四步.

第一步 令

$$v(t) = \int_0^t Q(t-s)f(s)\mathrm{d}s = \int_0^t Q(s)f(t-s)\mathrm{d}s, \qquad t\in[0,T].$$

证明 $v \in C^1([0,T),X)$. 事实上，如果 $f \in L^1((0,T),D(A))$, 那么当 $t \in [0,T)$, $h \in (0,T-t]$ 时，有

$$\begin{aligned}
&\frac{v(t+h)-v(t)}{h}\\
&= \int_0^t Q(t-s)\frac{Q(h)-I}{h}f(s)\mathrm{d}s + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} Q(t+h-s)f(s)\mathrm{d}s\\
&= \int_0^t Q(t-s)\frac{Q(h)-I}{h}f(s)\mathrm{d}s + \frac{1}{h}\int_0^{h} Q(s)f(t+h-s)\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

因为 $f(s) \in D(A)$, 所以由定理 3.2.1 的结论 (4) 知，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Q(t)f(s)) = -Q(t)Af(s)$,

从而 (记 $C=1+Me^{|a|T}$)

$$\frac{Q(h)-I}{h}f(s)=-\frac{1}{h}\int_0^h Q(t)Af(s)\mathrm{d}t,$$

$$\begin{aligned}\left\|\frac{Q(h)-I}{h}f(s)+Af(s)\right\|&=\frac{1}{h}\left\|\int_0^h [Q(t)Af(s)-Af(s)]\mathrm{d}t\right\|\\&\leqslant\frac{1}{h}\int_0^h \|Q(t)-I\|\cdot\|Af(s)\|\mathrm{d}t\\&\leqslant\frac{C}{h}\int_0^h\|Af(s)\|\mathrm{d}t\\&=C\|Af(s)\|\in L^1(0,T),\end{aligned}$$

并且

$$\lim_{h\to0^+}\left\|\frac{Q(h)-I}{h}f(s)+Af(s)\right\|=0.$$

利用控制收敛定理便知，当 $h\to0^+$ 时，在 $L^1((0,T),X)$ 上，有

$$\frac{Q(h)-I}{h}f\longrightarrow -Af. \tag{3.50}$$

注意到 $f\in C([0,T],X)$, 所以由 (3.49) 式和 (3.50) 式得

$$\frac{\mathrm{d}^+v}{\mathrm{d}t}(t)=-\int_0^t Q(t-s)Af(s)\mathrm{d}s+f(t),\qquad \forall\, t\in[0,T).$$

如果 $f\in W^{1,1}((0,T),X)$, 那么当 $t\in[0,T)$, $h\in(0,T-t]$ 时，有

$$\frac{v(t+h)-v(t)}{h}=\int_0^t Q(s)\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h}\mathrm{d}s+\frac{Q(h)}{h}\int_0^h Q(t-s)f(s)\mathrm{d}s.$$

由推论 1.2.25 知，当 $h\to0^+$ 时，在 $L^1((0,T),X)$ 上，有

$$\frac{f(t+h-\cdot)-f(t-\cdot)}{h}\longrightarrow f'(t-\cdot),$$

又因为 $f\in C([0,T],X)$, 所以

$$\frac{\mathrm{d}^+v}{\mathrm{d}t}(t)=\int_0^t Q(s)f'(t-s)\mathrm{d}s+Q(t)f(0),\qquad \forall\, t\in[0,T).$$

这说明在上述两种情况下，都有 $\dfrac{\mathrm{d}^+v}{\mathrm{d}t}(t)\in C([0,T),X)$. 因此 $v\in C^1([0,T),X)$.

第二步　类似可证，导数 $\dfrac{\mathrm{d}^-v}{\mathrm{d}t}(T)$ 有意义且等于极限 $\lim\limits_{t\to T^-}v'(t)$. 于是，$v\in C^1([0,T],X)$.

第三步 设 $t\in[0,T)$, $h\in[0,T-t]$, 则有

$$\begin{aligned}\frac{Q(h)-I}{h}v(t)&=\frac{1}{h}\int_0^t Q(t+h-s)f(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{h}\int_0^t Q(t-s)f(s)\mathrm{d}s\\&=\frac{v(t+h)-v(t)}{h}-\frac{1}{h}\int_t^{t+h}Q(t+h-s)f(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

在上式中, 令 $h\to 0^+$, 就推出 $v(t)\in D(A)$, 且 $-Av(t)=v'(t)-f(t)$. 因为 A 是闭算子, 所以该结论对 $t=T$ 仍然成立 (见定理 3.2.1 的结论 (6)). 故 $v\in C([0,T],D(A))$, 并且满足问题 (3.45) 的方程.

第四步 利用定理 3.2.1 的结论 (4) 和第三步的结论知

$$u(t)=Q(t)u_0+v(t)\in C([0,T],D(A))\cap C^1([0,T],X).$$

进一步还有

$$u'(t)=-AQ(t)u_0-Av(t)+f(t)=-Au(t)+f(t),\qquad \forall\, t\in[0,T],$$

并且 $u(0)=u_0$. 定理得证.

下面讨论初值问题 (3.45) 的解的渐近性质. 先从齐次问题入手, 即 $f\equiv 0$. 同时寻找保证解指数衰减的条件.

定理 3.5.8 设 $-A$ 是 C_0 半群 $Q(t)$ 的无穷小生成元. 如果存在 $1\leqslant p<\infty$, 使得

$$\int_0^\infty \|Q(t)x\|^p\mathrm{d}t<\infty,\qquad \forall\, x\in X. \tag{3.51}$$

那么存在 $M\geqslant 1$ 和 $a>0$, 使得 $\|Q(t)\|\leqslant M\mathrm{e}^{-at}$ 对所有 $t\geqslant 0$ 成立.

证明 首先证明, (3.51) 式蕴涵函数 $\|Q(t)\|$ 有界. 设 $\|Q(t)\|\leqslant M_1\mathrm{e}^{\omega t}$. 当 $\omega\leqslant 0$ 时, 结论显然成立. 现在假设 $\omega>0$. 则由 (3.51) 式可以断言: 对每一个 $x\in X$, 有 $Q(t)x\to 0$ $(t\to\infty)$. 如若不然, 则存在 $x\in X$, $\delta>0$ 以及 $t_n\to\infty$, 使得 $\|Q(t_n)x\|\geqslant\delta$. 不失一般性, 可认为 $t_{n+1}-t_n>\omega^{-1}$. 令 $I_n=[t_n-\omega^{-1},\ t_n]$, 则 $|I_n|=\omega^{-1}>0$, 并且区间 I_n 互不重叠. 对于 $t\in I_n$, 根据

$$\begin{aligned}\delta&\leqslant\|Q(t_n)x\|=\|Q(t+t_n-t)x\|\leqslant\|Q(t_n-t)\|\cdot\|Q(t)x\|\\&\leqslant M_1\mathrm{e}^{\omega(t_n-t)}\|Q(t)x\|\leqslant \mathrm{e}M_1\|Q(t)x\|,\end{aligned}$$

便可推出 $\|Q(t)x\|\geqslant\delta(\mathrm{e}M_1)^{-1}$. 于是

$$\int_0^\infty\|Q(t)x\|^p\mathrm{d}t\geqslant\sum_{n=1}^\infty\int_{I_n}\|Q(t)x\|^p\mathrm{d}t\geqslant\left(\frac{\delta}{\mathrm{e}M_1}\right)^p\sum_{n=1}^\infty|I_n|=\infty.$$

这与 (3.51) 式矛盾. 所以对任意 $x\in X$, 当 $t\to\infty$ 时, 都有 $Q(t)x\to 0$. 再由一致有界性定理知, 存在 $M_0>0$, 使得 $\|Q(t)\|\leqslant M_0$ 对所有 $t\geqslant 0$ 成立.

接下来, 考察由 $Sx=Q(t)x$ 所定义的映射 $S: X\to L^p(\mathbb{R}^+,X)$. 由 (3.51) 式知, S 在 X 上是适定的. 此外, 易见 S 是闭的 (留作习题). 因而由闭图象定理知, S 是有界的, 即存在 $M_2>0$, 使得

$$\int_0^\infty \|Q(t)x\|^p\mathrm{d}t\leqslant M_2^p\|x\|^p.$$

取 $0<\rho<M_0^{-1}$, 其中 $M_0>1$, 满足 $\|Q(t)\|\leqslant M_0$. 定义

$$t_x(\rho)=\sup\big\{t:\ \|Q(s)x\|\geqslant\rho\|x\|,\quad \forall\, 0\leqslant s\leqslant t\big\}.$$

因为当 $t\to\infty$ 时, $\|Q(t)x\|\to 0$, 所以对每一个 $x\in X$, $t_x(\rho)$ 都是正的有限数. 同时还有

$$t_x(\rho)\rho^p\|x\|^p\leqslant\int_0^{t_x(\rho)}\|Q(t)x\|^p\mathrm{d}t\leqslant\int_0^\infty\|Q(t)x\|^p\mathrm{d}t\leqslant M_2^p\|x\|^p.$$

因此 $t_x(\rho)\leqslant(M_2/\rho)^p:=t_0$. 于是当 $t>t_0$ 时, 就有

$$\|Q(t)x\|\leqslant\|Q(t-t_x(\rho))\|\cdot\|Q(t_x(\rho))x\|\leqslant M_0\rho\|x\|\ :=\ \beta\|x\|,$$

这里的 $\beta=M_0\rho<1$.

固定 $t_1>t_0$, 分解 $t=nt_1+s$, $0\leqslant s<t_1$, 便有

$$\|Q(t)\|\leqslant\|Q(s)\|\cdot\|Q(nt_1)\|\leqslant M\|Q(t_1)\|^n\leqslant M_0\beta^n\leqslant M\mathrm{e}^{-at},$$

其中 $M=M_0\beta^{-1}$, $a=-(1/t_1)\log\beta>0$. 定理得证.

定理 3.5.9 设 $a>0$, $-A$ 是 C_0 半群 $Q(t)$ 的无穷小生成元, 并且 $\|Q(t)\|\leqslant M\mathrm{e}^{-at}$. 假定 f 在 $[0,\infty)$ 上有界可测. 如果

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=f_0,$$

那么问题 (3.45) 的适度解 $u(t)$ 满足

$$\lim_{t\to\infty}u(t)=A^{-1}f_0.$$

证明 因为 $\|Q(t)\|\leqslant M\mathrm{e}^{-at}$, $a>0$, 所以由定理 3.2.5 得 $0\in\rho(A)$, 并且当 $t\to\infty$ 时, $\|Q(t)x\|\to 0$. 分解

$$\begin{aligned}v(t)&=\int_0^t Q(t-s)f(s)\mathrm{d}s\\&=\int_0^t Q(t-s)[f(s)-f_0]\mathrm{d}s+\int_0^t Q(t-s)f_0\mathrm{d}s\\&=v_1(t)+v_2(t).\end{aligned}$$

由定理 3.2.2 知

$$\lim_{t\to\infty} v_2(t) = \lim_{t\to\infty}\int_0^t Q(s)f_0\mathrm{d}s = \int_0^\infty Q(s)f_0\mathrm{d}s = A^{-1}f_0\,.$$

为了完成定理的证明，只需证 $\lim\limits_{t\to\infty} v_1(t) = 0$.

对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 选取 t_0, 使得当 $t > t_0$ 时，有

$$\|f(t) - f_0\| < \frac{a\varepsilon}{2M}.$$

记 $\|f\|_\infty = \sup_{t\geqslant 0}\|f(t)\|$, 我们有

$$\begin{aligned}\|v_1(t)\| &\leqslant \int_0^{t_0}\|Q(t-s)\|\cdot\|f(s)-f_0\|\mathrm{d}s + \int_{t_0}^t \|Q(t-s)\|\cdot\|f(s)-f_0\|\mathrm{d}s\\ &\leqslant 2\|f\|_\infty Ma^{-1}\mathrm{e}^{-a(t-t_0)} + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

取 $t > t_0$ 充分大，使得上式右端第一项小于 $\varepsilon/2$. 于是就可得所需结论. 证毕.

一个与之类似的结果就是下述定理.

定理 3.5.10 设 $a > 0$, $-A$ 是满足 $\|Q(t)\| \leqslant M\mathrm{e}^{-at}$ 的 C_0 半群 $Q(t)$ 的无穷小生成元. 假定 f 在 $[0,\infty)$ 上连续有界. 如果 $u_\varepsilon(t)$ 是下面问题的适度解:

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}u_\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t} = -Au_\varepsilon(t) + f(t), \qquad u_\varepsilon(0) = u_0, \qquad \varepsilon > 0.$$

则有

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} u_\varepsilon(t) = A^{-1}f(t), \qquad t\in[0,\infty),$$

并且对任意 $0 < \delta < T < \infty$, 上述极限在区间 $[\delta, T]$ 上一致成立.

证明 容易看出，$-\varepsilon^{-1}A$ 是 C_0 半群 $Q_\varepsilon(t) = Q(t/\varepsilon)$ 的无穷小生成元. 于是

$$u_\varepsilon(t) = Q_\varepsilon(t)u_0 + \varepsilon^{-1}\int_0^t Q_\varepsilon(t-s)f(s)\mathrm{d}s.$$

因为 $\|Q_\varepsilon(t)\| \leqslant M\mathrm{e}^{-(a/\varepsilon)t}$, 所以当 $\varepsilon\to 0^+$ 时，$\|Q_\varepsilon(t)x\| \to 0$ 在区间 $[\delta, T]$ 上一致成立. 记

$$\begin{aligned}v_\varepsilon(t) &= \varepsilon^{-1}\int_0^t Q_\varepsilon(t-s)f(s)\mathrm{d}s\\ &= \varepsilon^{-1}\int_0^t Q_\varepsilon(t-s)[f(s)-f(t)]\mathrm{d}s + \varepsilon^{-1}\int_0^t Q_\varepsilon(t-s)f(t)\mathrm{d}s\\ &:= v_{\varepsilon 1}(t) + v_{\varepsilon 2}(t).\end{aligned}$$

首先估计 $v_{\varepsilon 1}(t)$. 因为

$$
\begin{aligned}
\|v_{\varepsilon 1}(t)\| &\leqslant \varepsilon^{-1}\int_0^t \|Q_\varepsilon(t-s)\|\cdot\|f(s)-f(t)\|\mathrm{d}s \\
&\leqslant M\varepsilon^{-1}\int_0^t \mathrm{e}^{-a\tau/\varepsilon}\|f(t-\tau)-f(t)\|\mathrm{d}\tau \\
&= M\varepsilon^{-1}\int_0^{r\varepsilon} \mathrm{e}^{-a\tau/\varepsilon}\|f(t-\tau)-f(t)\|\mathrm{d}\tau \\
&\quad +M\varepsilon^{-1}\int_{r\varepsilon}^t \mathrm{e}^{-a\tau/\varepsilon}\|f(t-\tau)-f(t)\|\mathrm{d}\tau \\
&\leqslant M\varepsilon^{-1}\int_0^{r\varepsilon} \mathrm{e}^{-a\tau/\varepsilon}\|f(t-\tau)-f(t)\|\mathrm{d}\tau + 2\|f\|_\infty M a^{-1}\mathrm{e}^{-ar} \\
&= M\int_0^r \mathrm{e}^{-a\sigma}\|f(t-\varepsilon\sigma)-f(t)\|\mathrm{d}\sigma + 2a^{-1}\mathrm{e}^{-ar}M\|f\|_\infty,
\end{aligned} \tag{3.52}
$$

对于任意给定的 $\rho>0$, 选取 r 充分大，使得 (3.52) 式右端第二项小于 $\rho/2$. 固定这样的 r ，由 f 的连续性知，存在充分小的 $\varepsilon>0$, 使得 (3.52) 式右端第一项小于 $\rho/2$. 因此当 $\varepsilon\to 0^+$ 时， $v_{\varepsilon 1}(t)\to 0$.

接下来估计 $v_{\varepsilon 2}(t)$. 把 $v_{\varepsilon 2}(t)$ 写成

$$
\begin{aligned}
v_{\varepsilon 2}(t) &= \varepsilon^{-1}\int_0^t Q_\varepsilon(t-s)f(t)\mathrm{d}s = \varepsilon^{-1}\int_0^t Q_\varepsilon(\tau)f(t)\mathrm{d}\tau \\
&= \varepsilon^{-1}\int_0^\infty Q_\varepsilon(\tau)f(t)\mathrm{d}\tau - \varepsilon^{-1}\int_t^\infty Q_\varepsilon(\tau)f(t)\mathrm{d}\tau \\
&= A^{-1}f(t) - Q_\varepsilon(t)A^{-1}f(t),
\end{aligned}
$$

在上式中令 $\varepsilon\to 0^+$, 就可推出， $v_{\varepsilon 2}(t)\to A^{-1}f(t)$ 在 $[\delta, T]$ 上一致成立.

综上可知， $u_\varepsilon(t)\to A^{-1}f(t)$ 在 $[\delta, T]$ 上一致成立. 证毕.

注 3.5.1 在定理 3.5.10 中，如果 $u_0\in D(A)$, 并且 f 在 $[0,\infty)$ 上连续可微，那么可以证明

$$
\frac{\mathrm{d}u_\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t} \longrightarrow A^{-1}f'(t), \quad 当\ \varepsilon\to 0^+\ 时,
$$

并且上述极限在 $(0,\infty)$ 的任一闭区间上一致成立.

习 题 三

3.1 设 X 是一个 Banach 空间， $A\in\mathcal{L}(X)$. 定义 $Q(t)=\mathrm{e}^{tA}:=\sum_{n=0}^\infty \frac{(tA)^n}{n!}$. 证明:

(1) 级数 $\sum_{n=0}^\infty \frac{(tA)^n}{n!}$ 在 t 的任意有界区间上一致收敛;

(2) $\{Q(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是 C_0 半群;

(3) A 是 $\{Q(t)\}_{t\geqslant 0}$ 的无穷小生成元.

3.2 设 $X=L^p(\mathbb{R}^N)$, $p\in[1,\infty)$, $N\geqslant 1$. 对于 $t>0$, 定义

$$(Q(t)u)(x)=\frac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N}\exp\Big\{-\frac{|x-y|^2}{4t}\Big\}u(y)\mathrm{d}y,\qquad u\in X,\ x\in\mathbb{R}^N,$$

并定义 $Q(0)=I$. 证明 $\{Q(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 C_0 半群.

3.3 设 $-A$ 是有界的 C_0 半群 $Q(t)$ 的无穷小生成元 ($Q(t)$ 有界是指 $\|Q(t)\|\leqslant M$, $\forall\, t\geqslant 0$). 又设 $x\in D(A^2)$. 试证明:

(1) $Q(t)x-x=-tAx+\displaystyle\int_0^t(t-s)Q(s)A^2x\mathrm{d}s$;

(2) $\|Ax\|\leqslant\dfrac{2M}{t}\|x\|+\dfrac{Mt}{2}\|A^2x\|,\qquad t>0$;

(3) $\|Ax\|^2\leqslant 4M^2\|A^2x\|\cdot\|x\|$.

3.4 记 $X=\big\{f: f$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界且一致连续 $\big\}$, $\|f\|=\sup\limits_{\mathbb{R}}|f(x)|$. 定义

$$(Q(t)f)(x)=f(x-t),\qquad \forall\, f\in X,$$
$$(Af)(x)=f'(x),\qquad \forall\, f\in D(A):=\{f: f\in X,\ f'\in X\}.$$

证明:

(1) $Q(t)$ 是收缩半群;

(2) $-A$ 是 $Q(t)$ 的无穷小生成元.

3.5 令 $X=C_0(\mathbb{R}):=\{u: u\in C(\mathbb{R}),\ u(\pm\infty)=0\}$, 并定义 $\|u\|=\sup\limits_{\mathbb{R}}|u(x)|$. 那么 X 是一个 Banach 空间. 考察一阶方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t+u_x=0, & x\in\mathbb{R},\quad t\geqslant 0,\\ u(\pm\infty,t)=0, & t\geqslant 0,\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

把它改写成抽象的常微分方程

$$u'(t)+Au=0,\qquad t\geqslant 0;\qquad u(0)=u_0\in X,$$

其中

$$(Au)(x)=u'(x),\qquad \forall\, u\in D(A):=\{u:\ u,u'\in X\}.$$

试证明:

(1) A 是 X 上的闭稠定线性算子;

(2) 对于任意的 $\lambda\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\lambda<0$ 和 $v\in X$, 常微分方程的两点边值问题

$$\begin{cases} u'-\lambda u=v, & x\in\mathbb{R},\\ u(\pm\infty)=0 \end{cases}$$

有唯一解;

(3) $\rho(A) \supset \{\lambda: \lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\lambda < 0\}$, 且成立

$$\|R(\lambda, A)\| \leqslant \frac{1}{|\mathrm{Re}\lambda|}, \qquad \forall\, \lambda \in \rho(A).$$

(4) 存在以 $-A$ 为无穷小生成元的 C_0 半群 $Q(t)$，并求出 $Q(t)$.

3.6 证明复 Banach 空间上的有界线性算子是扇性算子.

3.7 假设 A 是扇性算子, $\mathrm{Re}\,\sigma(A) > 0$. 证明: A^{-1} 是紧的当且仅当对于任意 $t > 0$, 算子 e^{-tA} 是紧的.

3.8 设 A 是扇形算子. 试证明:

(1) 对所有 $x \in X$, $\lim\limits_{t \to 0^+} t\|A\mathrm{e}^{-tA}x\| = 0$;

(2) 对所有 $x \in X$, 抽象函数 $tA\mathrm{e}^{-tA}x:\ [0, \infty) \to X$ 连续.

3.9 设 $Sx = Q(t)x$ 是定理 3.5.8 的证明中所定义的映射 $S: X \to L^p(\mathbb{R}^+, X)$. 试证明 S 是闭的.

3.10 证明注 3.5.1 .

3.11 试证明: 如果取 $f(t) = Q(t)x$, 那么推论 3.5.4 不成立. 这说明在该推论中不能把 f 的条件减弱成 $f \in C([0, T), X)$.

第四章　半线性发展方程：抽象结论

§4.1　引　　言

半线性发展方程 指的是如下形式的抽象发展方程：

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = F(t, u(t)), & t \in [0, T), \\ u(0) = u_0 \in X, \end{cases} \tag{4.1}$$

其中，$-A$ 是 Banach 空间 X 上的某个 C_0 半群的无穷小生成元，F 关于第二个变元连续且局部 Lipschitz 连续．关于算子 A 没有其他限制．因此双曲型方程和抛物型方程都可以写成 (4.1) 的形式．然而，关于 F 的限制是非常严格的，这里的方法只适用于半线性发展方程．如果能够取到合适的连续函数空间作为“工作空间”，就不需要对 F 有“太多”的限制．这一点，读者可以通过本课程的学习以及今后的研究工作过程，慢慢体会和总结．

本章给出半线性发展方程解的存在性、唯一性、连续依赖性和稳定性．证明这些结果的基本思想同于常微分方程．下一章研究拟线性抛物型方程的方法亦如此．然而，本章中的技巧性预备知识要比下一章中的容易许多．

下面的 Gronwall 不等式，将在后续的一些结论的证明中发挥重要作用．

引理 4.1.1 (Gronwall引理)　设 $T > 0$, $g \in L^1(0,T)$, $g \geqslant 0$ 几乎处处成立，常数 $C_1, C_2 \geqslant 0$. 如果 $\varphi \in L^1(0,T)$, $\varphi \geqslant 0$ 几乎处处成立，并且满足 $g\varphi \in L^1(0,T)$ 以及

$$\varphi(t) \leqslant C_1 + C_2 \int_0^t g(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s, \qquad \text{a.e.} \quad t \in (0,T).$$

那么

$$\varphi(t) \leqslant C_1 \exp\left(C_2 \int_0^t g(s)\mathrm{d}s \right), \qquad \text{a.e.} \quad t \in (0,T).$$

证明　令

$$\psi(t) = C_1 + C_2 \int_0^t g(s)\varphi(s)\mathrm{d}s,$$

则 ψ 几乎处处可微，并且

$$\psi'(t) = C_2 g(t)\varphi(t) \leqslant C_2 g(t)\psi(t) \qquad \text{a.e.} \quad t \in (0,T).$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\psi(t)\exp\left(-C_2\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right)\right\}\leqslant 0,$$

从而

$$\psi(t)\leqslant C_1\exp\left(C_2\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right),\qquad \text{a.e.}\quad t\in(0,T).$$

又因为 $\varphi\leqslant\psi$, 所以结论成立. 证毕.

注 4.1.1　特别地，如果 $C_1=0$, 则 $\varphi=0$ 几乎处处成立.

定义 4.1.1　称函数 $F:X\to X$ 在 X 上局部 Lipschitz 连续，如果对任意 $M>0$, 存在正常数 $L(M)$, 使得

$$\|F(x)-F(y)\|\leqslant L(M)\|x-y\|,\qquad \forall\, x,y\in B_M(0),$$

其中 $B_M(0)$ 是以 $x=0$ 为心、以 M 为半径的球. 如果存在正常数 L, 使得

$$\|F(x)-F(y)\|\leqslant L\|x-y\|,\qquad \forall\, x,y\in X,$$

那么就称 $F(x)$ 在 X 上整体 Lipschitz 连续.

研究下一节中的基本结论的关键是下述定理. 要时刻牢记的是，下面的 (4.2) 式成立的首要条件是 $\int_0^t u(s)\mathrm{d}s\in D(A)$.

定理 4.1.2　设 $-A$ 是 Banach 空间 X 上的 C_0 半群 $Q(t)$ 的无穷小生成元，且存在常数 a 和 M, 使得 $\|Q(t)\|\leqslant M\mathrm{e}^{-at}$ 对 $t\geqslant 0$ 成立. 又设 $0<T<\infty$, $H:[0,T]\times X\to X$ 关于 t 连续、关于 x 整体 Lipschitz 连续，记它的 Lipschitz 常数为 L. 则对每一个 $u_0\in X$, 都存在唯一的 $u\in C([0,T],X)$, 使得

$$u(t)-u_0+A\int_0^t u(s)\mathrm{d}s=\int_0^t H(s,u(s))\mathrm{d}s,\qquad \forall\, t\in[0,T]. \tag{4.2}$$

此外，如果按照 $G(u_0)=u$ 的方式定义映射 $G:X\to C([0,T],X)$, 那么成立

$$\|G(x)(t)-G(y)(t)\|\leqslant M\|x-y\|\mathrm{e}^{(ML-a)t},\qquad \forall\, 0\leqslant t\leqslant T,\ x,y\in X. \tag{4.3}$$

证明　记 $Y=C([0,T],X)$. 对于 $u\in Y$, 定义范数 $\|u\|_\infty=\max\limits_{[0,T]}\|u(t)\|$, 则 Y 是 Banach 空间. 定义从 Y 到 Y 的映射 Φ：

$$\Phi(u)(t)=Q(t)u_0+\int_0^t Q(t-s)H(s,u(s))\mathrm{d}s,\qquad u\in Y,\ 0\leqslant t\leqslant T.$$

若 $u,v\in Y$, 则有

$$\|\Phi(u)(t)-\Phi(v)(t)\|\leqslant CL\int_0^t\|u(s)-v(s)\|\mathrm{d}s\leqslant CLt\|u-v\|_\infty,$$

其中 $C = \sup\limits_{[0,T]} \|Q(t)\|$. 于是

$$\|\Phi^n(u)(t) - \Phi^n(v)(t)\| \leqslant \frac{(CLt)^n}{n!}\|u - v\|_\infty, \qquad n \geqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{4.4}$$

从而，由压缩映射原理知，存在唯一的 $u \in Y$, 使得 $\Phi(u) = u$. 因此，利用定理 3.5.3 及 A 是闭的，就可以推出 (4.2) 式.

取 $x, y \in X$, 并记 $u = G(x)$, $v = G(y)$. 则当 $0 \leqslant t \leqslant T$ 时，有

$$\|u(t) - v(t)\| \leqslant M\mathrm{e}^{-at}\|x - y\| + ML\int_0^t \mathrm{e}^{-a(t-s)}\|u(s) - v(s)\|\mathrm{d}s,$$

$$\mathrm{e}^{at}\|u(t) - v(t)\| \leqslant M\|x - y\| + ML\int_0^t \mathrm{e}^{as}\|u(s) - v(s)\|\mathrm{d}s.$$

利用 Gronwall 引理就得到 (4.3) 式. 证毕.

注 4.1.2 由 $G(u_0) = u$ 所定义的算子 G 称为方程 (4.2) 的 **解算子** .

下面的推论说明， C_0 半群的无穷小生成元的有界摄动还是 C_0 半群的无穷小生成元. 这是一个非常重要的结论，但绝非偶然.

推论 4.1.3 设 $-A$ 是 Banach 空间 X 上的一个 C_0 半群的无穷小生成元. 若 $B \in \mathcal{L}(X)$, 则 $-A + B$ 也是 X 上的一个 C_0 半群的无穷小生成元.

证明 由定理 4.1.2 知，对每一个 $x \in X$, 都存在唯一的 $u \in C([0,\infty), X)$, 使得 (选取 $H(t,u) = Bu$)

$$u(t) = x + (-A + B)\int_0^t u(s)\mathrm{d}s, \qquad \forall\, t \in [0, \infty). \tag{4.5}$$

对于 $t \geqslant 0$, 定义 $R(t)x = u(t)$. 函数 u 的唯一性及式 (4.5) 说明 $R(t)$ 是线性的. 由 (4.3) 式推知， $R(t) \in \mathcal{L}(X)$. 注意到当 $t, r \geqslant 0$ 时，有

$$u(t + r) = u(r) + (-A + B)\int_r^{t+r} u(s)\mathrm{d}s.$$

所以， $R(t)R(r)x = R(t)u(r) = R(t + r)x$. 因而， $\{R(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是 X 上的 C_0 半群，记 $-P$ 是它的无穷小生成元. 于是，由定理 3.2.2 知，存在 $a' \in \mathbb{R}$, 使得 $(-\infty, a') \subset \rho(A) \cap \rho(P)$. 对任意满足 $|\lambda| \gg 1$ 的 $\lambda < 0$, 改写

$$A - B - \lambda = A - \lambda - B = [I - B(A - \lambda)^{-1}](A - \lambda).$$

注意到

$$\begin{aligned}\|B(A-\lambda)^{-1}\| &\leqslant \|B\| \cdot \|(A-\lambda)^{-1}\| \leqslant \|B\|\frac{M}{a' - \lambda}\\ &\leqslant \|B\|\frac{2M}{|\lambda|} < 1, \qquad \forall\, \lambda < 0,\ |\lambda| \gg 1,\end{aligned}$$

由定理 2.1.9 知, $1 \in \rho(B(A-\lambda)^{-1})$. 这说明, 只要 $\lambda < 0$ 且 $|\lambda| \gg 1$, 就有 $\lambda \in \rho(A-B)$. 于是, 存在 $a \in \mathbb{R}$, 使得 $(-\infty, a) \subset \rho(A-B) \cap \rho(P)$. 若 $x \in D(P)$, 并且 u 由 (4.5) 式给出, 则当 $h \to 0^+$ 时, 有

$$\frac{1}{h}\int_0^h u(s)\mathrm{d}s \to x, \qquad (A-B)\frac{1}{h}\int_0^h u(s)\mathrm{d}s = \frac{1}{h}(x - R(h)x) \to Px.$$

由此以及 $A-B$ 是闭的, 就推出 $A-B$ 是 P 的延拓. 再利用命题 2.1.12 知, $A-B=P$. 证毕.

下面给出的映射 R_r 称为**保核收缩映射**. 借助于此映射, 我们就可以把定理 4.1.2 应用于局部 Lipschitz 连续函数 F.

引理 4.1.4 设 X 是 Banach 空间, $r>0$. 按下面的方式定义从 X 到 X 的映射 R_r:

$$R_r(x) = x, \text{ 当 } \|x\| \leqslant r \text{ 时}; \quad R_r(x) = \frac{r}{\|x\|}x, \text{ 当 } \|x\| > r \text{ 时},$$

则对任意 $x, y \in X$, 有 $\|R_r(x) - R_r(y)\| \leqslant 2\|x-y\|$, $\|R_r(x)\| \leqslant r$.

证明 首先, 根据 R_r 的定义知, $\|R_r(x)\| \leqslant r$ 对任意的 $x \in X$ 成立. 再证 $\|R_r(x) - R_r(y)\| \leqslant 2\|x-y\|$ 对任意的 $x, y \in X$ 成立. 记 $B_r(0) = \{x \in X : \|x\| \leqslant r\}$. 当 $x, y \in B_r(0)$ 时, 结论显然成立. 当 $x \in B_r(0)$, $y \in X \setminus B_r(0)$ 时, 由于

$$R_r x - R_r y = x - y + \left(1 - \frac{r}{\|y\|}\right) y,$$

因此

$$\begin{aligned} \|R_r x - R_r y\| &\leqslant \|x-y\| + \|y\| - r \\ &\leqslant 2\|x-y\| + \|x\| - r \leqslant 2\|x-y\|. \end{aligned}$$

当 $x, y \in X \setminus B_r(0)$ 时. 因为

$$R_r x - R_r y = \frac{r}{\|x\|}(x-y) + \frac{r(\|y\| - \|x\|)}{\|x\| \cdot \|y\|} y,$$

所以

$$\|R_r x - R_r y\| \leqslant \|x-y\| + \big|\,\|y\| - \|x\|\,\big| \leqslant 2\|x-y\|.$$

§4.2 基本理论

本节总假设

(1) X 是 Banach 空间;

(2) $-A$ 是 X 上的 C_0 半群 $Q(t)$ 的无穷小生成元，并且存在 $M \geqslant 1$, $a \in \mathbb{R}$, 使得 $\|Q(t)\| \leqslant M\mathrm{e}^{-at}$ 对所有 $t \geqslant 0$ 成立;

(3) $T \in (0,\infty]$, $\mathcal{O}$ 是 X 中的开集， $F : [0,T) \times \mathcal{O} \to X$ 连续，并且对于 $t \in (0,T)$ 和 $z \in \mathcal{O}$, 存在 $\delta = \delta(t,z) > 0$ 和 $L = L(t,z) < \infty$, 使得

$$\|F(s,x) - F(s,y)\| \leqslant L\|x-y\|, \qquad \forall\, x,y \in B_\delta(z),\ s \in [0,t].$$

因为 $\mathcal{O}$ 是开的，所以可以取 $\delta = \delta(t,z)$ 充分小，使得 $B_\delta(z) \subset \mathcal{O}$.

对于 $\tau \in (0,T]$, 记 $\mathcal{S}_m(\tau)$ 是所有满足 $\displaystyle\int_0^t u(s)\mathrm{d}s \in D(A)$ 和

$$u(t) - u(0) + A\int_0^t u(s)\mathrm{d}s = \int_0^t F(s,u(s))\mathrm{d}s, \qquad \forall\, t \in [0,\tau) \tag{4.6}$$

的函数 $u \in C([0,\tau),\mathcal{O})$ 构成的集合. 由定理 3.5.3 知， $u \in \mathcal{S}_m(\tau)$ 的充要条件是 $u \in C([0,\tau),\mathcal{O})$ 且

$$u(t) = Q(t)u_0 + \int_0^t Q(t-s)F(s,u(s))\mathrm{d}s, \qquad \forall\, t \in [0,\tau). \tag{4.7}$$

我们称 $\mathcal{S}_m(\tau)$ 是问题 (4.1) 的 **适度解集合** .

引理 4.2.1 设 $\tau \in (0,T)$, $w \in C([0,\tau],\mathcal{O})$, 则存在 $\delta, L > 0$ 和连续函数 $H : [0,\tau] \times X \to X$, 使得

(1) 如果 $t \in [0,\tau]$, $z \in B_\delta(w(t))$, 则 $z \in \mathcal{O}$ 且 $H(t,z) = F(t,z)$;

(2) $\|H(t,x) - H(t,y)\| \leqslant L\|x-y\|$ 对所有的 $t \in [0,\tau]$ 和 $x,y \in X$ 成立.

证明 对任意 $t \in [0,\tau]$, 根据条件 (3)(视 $\tau = t$, $w(t) = z$), 可以选取 $\delta(t) = \delta(\tau, w(t)) > 0$ 和 $L(t) = L(\tau, w(t)) < \infty$, 使得 $B_{\delta(t)}(w(t)) \subset \mathcal{O}$ 且

$$\|F(s,x) - F(s,y)\| \leqslant L(t)\|x-y\|, \qquad \forall\, x,y \in B_{\delta(t)}(w(t)),\ s \in [0,\tau].$$

取 $\mu(t) > 0$, 使得当 $|s-t| < \mu(t)$ 时， $\|w(s) - w(t)\| < \delta(t)/2$. 因为 $[0,\tau]$ 是紧的，所以存在 $t_i \in [0,\tau]$, 使得

$$[0,\tau] \subset B_{\mu(t_1)}(t_1) \cup \cdots \cup B_{\mu(t_n)}(t_n).$$

记

$$L = 2\max_i L(t_i), \qquad \delta = \min_i \frac{\delta(t_i)}{4},$$

则当 $t \in [0,\tau]$, $x,y \in B(w(t), 2\delta)$ 时，有 $x,y \in \mathcal{O}$, 并且 $\|F(t,x) - F(t,y)\| \leqslant \dfrac{1}{2}L\|x-y\|$ 成立.

对于 $t\in[0,\tau]$ 和 $x\in X$, 定义 $H(t,x)=F(t,w(t)+R_\delta(x-w(t)))$, 即得所要的结论. 这里的 R_r 由引理 4.1.4 定义. 证毕.

定理 4.2.2 (局部存在性) 对每一个 $u_0\in\mathcal{O}$, 都存在 $\theta\in(0,T)$ 和 $u\in\mathcal{S}_m(\theta)$, 使得 $u(0)=u_0$. 此外还有

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant\theta}\|u_n(t)-u(t)\|=0,$$

其中 $u_n\in C([0,\theta],\mathcal{O})$ 由下面的迭代过程定义:

$$u_1(t)=u_0,\ \ u_{n+1}(t)=Q(t)u_0+\int_0^t Q(t-s)F(s,u_n(s))\mathrm{d}s,\ \ t\in[0,\theta],\ n=1,2,\cdots.$$

证明 取 $\tau\in(0,T)$, 并令 $w(t)=u_0, t\in[0,\tau]$. 设 δ 和 H 由引理 4.2.1 给出, $u\in C([0,\tau),X)$ 由定理 4.1.2 给出. 因为 u 连续, 故存在 $\theta\in(0,\tau]$, 使得 $\|u(t)-w(t)\|<\delta$ 对所有 $0\leqslant t\leqslant\theta$ 成立. 于是, $H(t,u(t))=F(t,u(t))$, 从而 $u\in\mathcal{S}_m(\theta)$, 定理的第一个结论成立. 如果取 θ 很小, 由 (4.4) 式知, 定理的第二个结论成立. 证毕.

定理 4.2.3 (唯一性) 设 $0<\mu\leqslant\theta\leqslant T$, $w\in\mathcal{S}_m(\mu)$, $u\in\mathcal{S}_m(\theta)$, 并且 $w(0)=u(0)$. 那么 $w(t)=u(t)$ 对所有的 $0\leqslant t<\mu$ 成立.

证明 任意固定 $\tau\in(0,\mu)$, 并设 δ 和 H 由引理 4.2.1 确定. 对某个 $\tau'\in(0,\tau]$, 有 $\|u(t)-w(t)\|<\delta$ 对所有 $0\leqslant t\leqslant\tau'$ 成立. 从而 $H(t,u(t))=F(t,u(t))$. 于是, 由定理 4.1.2 推出, 在 $[0,\tau']$ 上有 $u=w$. 继续这一分析过程可知, $u=w$ 在 $[0,\tau]$ 上成立. 证毕.

定理 4.2.4 (连续依赖性) 设 $0<\tau<\mu\leqslant T$, $w\in\mathcal{S}_m(\mu)$, 则存在 $\varepsilon, C>0$, 使得对每一个 $u_0\in B_\varepsilon(w(0))$, 都存在 $u\in\mathcal{S}_m(\tau)$, 满足 $u(0)=u_0$ 和

$$\|u(t)-w(t)\|\leqslant C\|u(0)-w(0)\|,\qquad\forall\, t\in[0,\tau].\tag{4.8}$$

证明 取 δ, L 和 H 如引理 4.2.1. 记 $C=\max\{M\mathrm{e}^{(ML-a)\tau}, M\}$, 并选取 $\varepsilon\in(0,\delta/C)$. 对于 $u_0\in B_\varepsilon(w(0))$, 取 $u=G(u_0)$, 其中算子 G 同于定理 4.1.2. 那么 (4.8) 式成立, 即

$$\|u(t)-w(t)\|\leqslant C\|u(0)-w(0)\|<\varepsilon C,\qquad\forall\, t\in[0,\tau].$$

因为 $\varepsilon C<\delta$, 所以由引理 4.2.1 知, $H(t,u(t))=F(t,u(t))$ 在 $[0,\tau]$ 上成立, 从而 $u\in\mathcal{S}_m(\tau)$. 证毕.

定理 4.2.5 (延拓) 设 $u_0\in\mathcal{O}$, 则存在 $\tau_0:=\tau_0(u_0)\in(0,T]$ 和 $u\in\mathcal{S}_m(\tau_0)$, 满足 $u(0)=u_0$, 并且还有: 对任意 $\mu\in(0,T]$, 如果存在 $v\in\mathcal{S}_m(\mu)$ 满足 $v(0)=u_0$,

就有 $\tau_0 \geqslant \mu$. 此外，如果 $\tau_0 < T$, 那么，或者 $\int_0^{\tau_0} \|F(t,u(t))\|\mathrm{d}t = \infty$, 或者存在 $x \in \bar{\mathcal{O}} \setminus \mathcal{O}$, 使得 $\lim\limits_{t\to\tau_0} u(t) = x$. 这样的解 u 称为 **极大定义解** .

证明 第一个结论可由定理 4.2.2 和定理 4.2.3 推出. 下证第二个结论. 如果 $\tau_0 < T$ 且

$$\int_0^{\tau_0} \|F(t,u(t))\|\mathrm{d}t < \infty.$$

由控制收敛定理和 (4.7) 式知，存在 $x \in X$, 使得 $\lim\limits_{t\to\tau_0} u(t) = x$. 显然， $x \in \bar{\mathcal{O}}$. 现在用反证法证明 $x \notin \mathcal{O}$. 假设 $x \in \mathcal{O}$, 选取 $\tau' \in (\tau_0, T)$, 记 $u(t) = x$, $t \in [\tau_0, \tau']$. 对于这个 $u \in C([0,\tau'], \mathcal{O})$, 根据引理 4.2.1 可以确定出相应的 δ 和 H, 并且 $F(t,u(t)) = H(t,u(t))$ 在 $[0,\tau']$ 上成立. 于是由定理 4.1.2 知，存在 $v \in C([0,\tau'], X)$, 使得

$$v(t) - u_0 + A\int_0^t v(s)\mathrm{d}s = \int_0^t H(s,v(s))\mathrm{d}s, \qquad \forall\, t \in [0,\tau'].$$

解的唯一性断言 $v = u$ 在 $[0,\tau_0]$ 上成立. 因此存在 $\mu \in (\tau_0,\tau']$, 使得 $v(t) \in B_\delta(u(t))$, $\forall t \in [\tau_0,\mu]$. 从而在 $[\tau_0,\mu]$ 上，有 $H(t,v(t)) = F(t,v(t))$. 于是 $v \in \mathcal{S}_m(\mu)$, 这与 τ_0 是最大存在时间相矛盾. 证毕.

定理 4.2.6 (稳定性) 假设 $a > 0$, $M > 1$, $\varepsilon \in (0, a/M)$, $T = \infty$, $\delta > 0$, $B_\delta(0) \subset \mathcal{O}$. 如果

$$\|F(t,x)\| \leqslant \varepsilon\|x\|, \qquad \forall\, t \geqslant 0,\ x \in B_\delta(0),$$

则对每一个 $u_0 \in B_{\delta/M}(0)$, 都存在 $u \in \mathcal{S}_m(\infty)$, 满足 $u(0) = u_0$ 及

$$\|u(t)\| \leqslant M\|u_0\|\mathrm{e}^{(M\varepsilon-a)t}, \qquad \forall\, t \geqslant 0. \tag{4.9}$$

证明 设 τ 是最大存在时间，$u \in \mathcal{S}_m(\tau)$ 是极大定义解并且满足 $u(0) = u_0$ (见定理 4.2.5). 因为 $\|u(0)\| = \|u_0\| < \delta/M < \delta$, 所以存在 $\mu \in (0,\tau]$, 使得对 $0 < t < \mu$, 有 $\|u(t)\| < \delta$. 令

$$\tau' = \max\{\mu \in (0,\tau] : \|u(t)\| < \delta,\ \ \forall\, 0 \leqslant t < \mu\}.$$

由 (4.7) 式，我们有

$$\|u(t)\| \leqslant M\mathrm{e}^{-at}\|u_0\| + M\varepsilon\int_0^t \mathrm{e}^{-a(t-s)}\|u(s)\|\mathrm{d}s,$$

$$\mathrm{e}^{at}\|u(t)\| \leqslant M\|u_0\| + M\varepsilon\int_0^t \mathrm{e}^{as}\|u(s)\|\mathrm{d}s, \qquad \forall\, 0 \leqslant t < \tau'.$$

利用 Gronwall 引理推知， (4.9) 式在 $[0,\tau')$ 上成立. 如果 $\tau' < \tau$, 那么由 (4.9) 式和 $\varepsilon < a/M$ 知， $\|u(\tau')\| \leqslant M\|u_0\| < \delta$. 这与 τ' 的定义相矛盾. 因此 $\tau' = \tau$.

如果 $\tau<\infty$, 显然有 $\int_0^\tau\|F(t,u(t))\|\mathrm{d}t<\infty$. 从而由定理 4.2.5 知, $\lim\limits_{t\to\tau}u(t)=x\in\bar{\mathcal{O}}\setminus\mathcal{O}$. 另一方面，由不等式 (4.9) 推出, $\|x\|\leqslant M\|u_0\|<\delta$. 这与 $x\in\bar{\mathcal{O}}\setminus\mathcal{O}$ 矛盾. 故 $\tau=\infty$. 证毕.

研究适度解的光滑性是非常重要的. 下面的定理说明在一些特殊情形下, 问题 (4.1) 的适度解是古典解.

定理 4.2.7 设 X 是自反的, $T>0$ 且 $F(t,u):[0,T]\times X\to X$ 关于 $t\in[0,T]$ 整体 Lipschitz 连续, 关于 $x\in X$ 局部 Lipschitz 连续, 即对任意 $K>0$, 均存在正常数 $L(K)$, 使得

$$\|F(t,u)-F(s,v)\|\leqslant L(K)(|t-s|+\|u-v\|),\quad\forall\, t,s\in[0,T],\ u,v\in B_K(0).$$

假定 $u_0\in X$, $u\in C([0,T],X)$ 是问题 (4.1) 的适度解, 即 u 满足 (4.7) 式. 如果 $u_0\in D(A)$, 那么 $u\in C([0,T],D(A))\cap C^1([0,T],X)$, 并且满足 (4.1) 式. 这说明 u 是问题 (4.1) 的古典解.

证明 设 $h>0$, $t\in[0,T-h]$. 直接计算知

$$\begin{aligned}u(t+h)-u(t)=&\ Q(t)[Q(h)u_0-u_0]+\int_0^h Q(t+h-s)F(s,u(s))\mathrm{d}s\\&+\int_0^t Q(t-s)[F(s+h,u(s+h))-F(s,u(s))]\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{4.10}$$

记 $K=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|$, 则成立

$$\begin{aligned}&\|F(s+h,u(s+h))-F(s,u(s))\|\\\leqslant&\ \|F(s+h,u(s+h))-F(s+h,u(s))\|+\|F(s+h,u(s))-F(s,u(s))\|\\\leqslant&\ L(K)(h+\|u(s+h)-u(s)\|).\end{aligned}\tag{4.11}$$

取 $\bar{M}=M\mathrm{e}^{|a|T}$. 根据 $\|Q(t)\|\leqslant M\mathrm{e}^{-at}$, 由 (4.10) 式和 (4.11) 式推出

$$\begin{aligned}\|u(t+h)-u(t)\|\leqslant&\ \bar{M}\|Q(h)u_0-u_0\|+h\bar{M}\{TL(K)+\max_{0\leqslant s\leqslant T}\|F(s,u(s))\|\}\\&+\bar{M}L(K)\int_0^t\|u(s+h)-u(s)\|\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{4.12}$$

进一步还有

$$Q(h)u_0-u_0=-\int_0^h Q(s)Au_0\mathrm{d}s.$$

从而，$\|Q(h)u_0 - u_0\| \leqslant h\bar{M}\|Au_0\|$. 于是由 (4.12) 式知，存在正常数 C_1 和 C_2, 使得

$$\|u(t+h) - u(t)\| \leqslant hC_1 + C_2\int_0^t \|u(s+h) - u(s)\|\mathrm{d}s.$$

因而由 Gronwall 引理知，存在正常数 C, 使得

$$\|u(t+h) - u(t)\| \leqslant hC, \qquad 0 \leqslant t < t+h \leqslant T.$$

这说明，$u : [0,T] \to X$ 是 Lipschitz 连续的. 由此又推出 $F(\cdot, u(\cdot)) : [0,T] \to X$ 也是 Lipschitz 连续的. 根据推论 1.2.27 知

$$f(\cdot) := F(\cdot,\, u(\cdot)) \in W^{1,\infty}((0,T),\, X) \hookrightarrow W^{1,1}((0,T),\, X).$$

对于 $f(t) = F(t, u(t))$, 利用定理 3.5.7 推知，$u \in C([0,T],\, D(A)) \cap C^1([0,T],\, X)$, 并且满足

$$u' + Au(t) = f(t) = F(t, u(t)), \qquad \forall\, t \in [0,T]; \qquad u(0) = u_0.$$

定理得证.

如果 $Q(t)$ 是收缩半群，F 不依赖于 t, 并且关于 $x \in X$ 局部 Lipschitz 连续，即对任意 $K > 0$, 存在正常数 $L(K)$, 使得

$$\|F(x) - F(y)\| \leqslant L(K)\|x - y\|, \qquad \forall\, x, y \in B_K(0).$$

那么我们还可以得到一个比定理 4.2.5 更好的结论. 此时，$T = \infty$, $\mathcal{O} = X$.

定理 4.2.8　对于 $u_0 \in X$, 记 τ_0 由定理 4.2.5 给出. 则成立

$$2L(\|F(0)\| + 2\|u(t)\|) + 1 \geqslant \frac{1}{\tau_0 - t}, \qquad \forall\, t \in [0, \tau_0). \tag{4.13}$$

同时还有下面的二择一结论：

(i) $\tau_0 = \infty$, 或者

(ii) $\tau_0 < \infty$, 且 $\lim\limits_{t \to \tau_0} \|u(t)\| = \infty$.

证明　只需证明估计式 (4.13). 如果 $\tau_0 = \infty$, 那么估计式 (4.13) 显然成立. 假设 $\tau_0 < \infty$ 且存在 $t_0 \in [0, \tau_0)$, 使得 (4.13) 不成立. 记 $M = \|u(t_0)\|$, 令

$$T_M = \frac{1}{2L(2M + \|F(0)\|) + 1}.$$

则 $\tau_0 - t_0 < T_M$. 设 $v \in C([0,\tau), X)$ 是问题

$$v(t) = Q(t)u(t_0) + \int_0^t Q(t-s)F(v(s))\mathrm{d}s, \qquad t \in (0,\tau) \tag{4.14}$$

的唯一极大定义解. 我们断言 $\tau > T_M$. 事实上，不妨假设 $\tau < \infty$. 取

$$\tilde{\tau} = \sup\{s \in (0,\tau) : \|v(t)\| < 2M + \|F(0)\|, \ \forall t \in [0,s]\}.$$

则由定理 4.2.5 知， $\tilde{\tau} < \tau$ 并且 $\max\limits_{[0,\tilde{\tau}]} \|v(t)\| = \|v(\tilde{\tau})\| = 2M + \|F(0)\|$. 因为 $Q(t)$ 是收缩半群，所以对任意的 $t \in [0,\tilde{\tau}]$, 利用 (4.14) 式，我们有

$$\begin{aligned}
\|v(t)\| &\leqslant M + \int_0^t \|F(v(s)) - F(0) + F(0)\|\mathrm{d}s \\
&\leqslant M + \int_0^t \big[\|F(v(s)) - F(0)\| + \|F(0)\|\big]\mathrm{d}s \\
&\leqslant M + \int_0^t \big[L(2M + \|F(0)\|)\|v(s)\| + \|F(0)\|\big]\mathrm{d}s \\
&\leqslant M + \int_0^t \big[L(2M + \|F(0)\|)\|v(\tilde{\tau})\| + \|F(0)\|\big]\mathrm{d}s \\
&\leqslant M + \tilde{\tau}\big[L(2M + \|F(0)\|)\|v(\tilde{\tau})\| + \|F(0)\|\big].
\end{aligned}$$

从而

$$\|v(\tilde{\tau})\| \leqslant M + \tilde{\tau}\big[L(2M + \|F(0)\|)\|v(\tilde{\tau})\| + \|F(0)\|\big].$$

再利用 $\|v(\tilde{\tau})\| = 2M + \|F(0)\|$ 就推出 $\tilde{\tau} > T_M$. 当然有 $\tau > T_M$, 因此 $v \in C([0,T_M], X)$.

定义 $w \in C([0, t_0 + T_M], X)$：

$$w(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [0,t_0], \\ v(t-t_0), & t \in [t_0, t_0 + T_M]. \end{cases}$$

容易验证， $w \in \mathcal{S}_m(t_0 + T_M)$ 且满足 $w(0) = u_0$. 因为 $t_0 + T_M > \tau_0$, 所以这与 τ_0 的定义相矛盾. 证毕.

习 题 四

4.1 如果 X 是 Hilbert 空间，证明引理 4.1.4 所给出的保核收缩映射 R_r 满足：$\|R_r(x) - R_r(y)\| \leqslant \|x-y\|$ 对所有 $x, y \in X$ 和 $r > 0$ 成立.

4.2 取 $T = \infty$, X 是一个 Sobolev 空间. 分别就下列各种情况，讨论解的最大存在时间 τ_0 是有限值还是无穷大. 并说明：如果最大存在时间 $\tau_0 = \infty$, 那么当 $t \to \infty$ 时，解 $u(t)$ 有何

性质；如果最大存在时间 $\tau_0<\infty$, 那么当 $t\to\tau_0^-$ 时，解 $u(t)$ 有何性质 (如果 $\tau_0=\infty$, 就称解 $u(t)$ 整体存在；如果 $\tau_0<\infty$, 且当 $t\to\tau_0^-$ 时，$\|u(t)\|\to\infty$, 就称解 $u(t)$ 在有限时刻爆破).

(1) $\mathcal{O}=X$, $F(t,u)=u^2$;

(2) $\mathcal{O}=X$, $F(t,u)=\dfrac{1}{1+u^2}$;

(3) $\mathcal{O}=X$, $F(t,u)=\dfrac{u}{1+u^2}$;

(4) $\mathcal{O}=X$, $F(t,u)=\dfrac{u^3}{1+u^2}$;

(5) $\mathcal{O}=\{u\in X:\ \|u\|<1\}$, $F(t,u)=\dfrac{1}{1-u^2}$;

(6) $\mathcal{O}=\{u\in X:\ \|u\|>1\}$, $F(t,u)=\dfrac{u|u|^3}{u^2-1}$.

4.3 设 $T=\infty$, X 是一个 Sobolev 空间. 取 $\mathcal{O}=X$, $F(t,u)=|u|^{1/2}$. 试问解的唯一性是否还成立？如果取 $F(t,u)=u|u|^{1/2}$ 呢？

4.4 设 X 是一个 Sobolev 空间. 取 $\mathcal{O}=\{u\in X:\ \|u\|<1\}$,

$$F(t,u)=\frac{|u|^{\alpha-1}u}{(1-t)^2(1-u^2)^2},$$

其中 $\alpha>0$. 分别就 α 的不同情况，讨论解的局部存在性、唯一性及延拓定理.

4.5 假设 $a>0$, $\varepsilon\in(0,\,a/M)$, $T=\infty$, $w_0\subset\mathcal{O}$, 并且 F 满足

$$F(t,w_0)=0,\qquad \|F_u(t,w_0)\|\leqslant\varepsilon,\qquad \forall\, t\geqslant 0.$$

试叙述一个与定理 4.2.6 类似的结果. 如果 F 满足

$$F(t,w_0)=0,\qquad \|F_u(t,w_0)\|>a/M,\qquad \forall\, t\geqslant 0,$$

你能得到什么样的结论？

4.6 设 $p,q>1$, $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是一个有界光滑区域. 考察双曲型方程组的初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=|v|^{p-1}v, & x\in\Omega, t>0,\\ v_{tt}-\Delta v=|u|^{q-1}u, & x\in\Omega, t>0,\\ u=v=0, & x\in\partial\Omega, t>0,\\ (u,u_t,v,v_t)|_{t=0}=(u_0,\tilde{u}_0,v_0,\tilde{v}_0), & x\in\Omega. \end{cases}$$

通过选取合适的工作空间 X, 讨论解的局部存在性. 同时说明这个解是整体存在，还是在有限时刻爆破.

4.7 设 $p,q>1$, $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是一个有界光滑区域. 考察抛物型方程组的初边值问题

$$\begin{cases} u_t-\Delta u=|v|^{p-1}v, & x\in\Omega, t>0,\\ v_t-\Delta v=|u|^{q-1}u, & x\in\Omega, t>0,\\ u=v=0, & x\in\partial\Omega, t>0,\\ (u,v)|_{t=0}=(u_0,v_0), & x\in\Omega. \end{cases}$$

通过选取合适的工作空间 X, 讨论解的局部存在性. 同时说明这个解是整体存在，还是在有限时刻爆破.

第五章　半线性抛物型方程

§5.1　初 值 问 题

先讨论初值问题

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + F(u), & x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{5.1}$$

其中 $F \in C^1((a, b), \mathbb{R})$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$. 在 2.5.3 节，我们已经证明 Δ_ℓ 是 C_ℓ 上的一个收缩半群的无穷小生成元. 重新回顾一下： Δ_ℓ 是算子 Δ 在 C_ℓ 中的闭包，其定义域由形如 $c + v$ 的函数构成，其中 $c \in \mathbb{R}$, v 是实值速降函数.

定义

$$\mathcal{O} = \{v \in C_\ell : \, v_- := \inf_x v(x) > a, \; v_+ := \sup_x v(x) < b\}.$$

如果 $v \in \mathcal{O}$, 那么存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $v_- - \varepsilon > a$ 且 $v_+ + \varepsilon < b$. 因此

$$\|F(z) - F(w)\|_\infty \leqslant L\|z - w\|_\infty, \quad \forall \, z, w \in B_\varepsilon(v),$$

其中 $L = \max\limits_{[v_- - \varepsilon, v_+ + \varepsilon]} |F'(x)|$.

下面假定 $u_0 \in \mathcal{O}$. 又设 $\tau_0 \in (0, \infty]$, $u \in \mathcal{S}_m(\tau_0)$ 由定理 4.2.5 给出. 根据定理 4.2.3 知，对任意 $\mu \in (0, \tau_0]$, 这个解 u 是 $C([0, \mu), C_\ell)$ 中满足 $\int_0^t u(s)\mathrm{d}s \in D(\Delta_\ell)$ 以及

$$u(t) - u_0 = \Delta_\ell \int_0^t u(s)\mathrm{d}s + \int_0^t F(u(s))\mathrm{d}s, \quad \forall \, t \in [0, \mu) \tag{5.2}$$

的唯一元素，所以 u 在平均意义下是原问题 (5.1) 的解. 借助于证明 u 的正则性，还可以证明 u 也是问题 (5.1) 的古典解.

公式 (5.2) 说明，对于 $r \in [0, \tau_0)$ 以及 $0 \leqslant t < \tau_0 - r$, 函数 $\tilde{u}(t) := u(t + r) \in \mathcal{S}_m(\tau_0 - r)$. 同时，利用定理 4.2.3 又可以推出， $\tilde{u}$ 是以 $u(r)$ 为初值的唯一解. 因此函数 u 具有半群性质.

定理 4.2.5 也说明，如果 $\tau_0 < \infty$, 那么，或者 $\int_0^{\tau_0} \sup\limits_x |F(u(t, x))|\mathrm{d}t = \infty$, 或者 u 趋向于 $\mathcal{O}$ 的边界 $\bar{\mathcal{O}} \setminus \mathcal{O}$. 例如，对于 $F(u) = \pm e^u$, 解 $u(t)$ 或者对所有的时间 t 都

存在, 即 $\tau_0=\infty$, 或者 $\tau_0<\infty$ 且 $\lim\limits_{t\nearrow\tau_0}\|u(t)\|_\infty=\infty$ (见定理 4.2.8). 如果 F 有界且 $(a,b)=\mathbb{R}$, 那么解 $u(t)$ 对所有时间 t 都存在.

设 $h(t)\in\mathbb{R}$ 是 $u(t)$ 在无穷远处的值, 即 $h(t)=\ell(u(t))$, 其中 $\ell\in C_\ell^*$ 由 2.5.3 节定义. 把 $\ell(\Delta_\ell v)=0$ ($\forall\, v\in D(\Delta_\ell)$) 的结论应用于 (5.2) 式, 就推出 h 满足常微分方程

$$h'(t)=F(h(t)),\qquad t\in[0,\tau_0).$$

如果 u_0 是一个常值函数, 解的唯一性表明 $u(t,x)=h(t)$ 对任意 $x\in\mathbb{R}$ 和 $t\in[0,\tau_0)$ 成立. 例如, 当 $F(u)=\dfrac{1}{1-u}$, $b=\infty$ 且 $a=1$ 时, 上述常微分方程的解是

$$h(t)=1-\sqrt{(1-h(0))^2-2t}.$$

由此知, 对应的 $\tau_0=\dfrac{1}{2}[1-h(0)]^2$.

定理 5.1.1 (比较原理) 设 $v,w\in\mathcal{S}_m(\mu)$. 若 $w(0)\geqslant v(0)$, 并且 $F'\geqslant 0$, 则 $w(t)\geqslant v(t)$ 在 $[0,\mu)$ 上成立.

证明 由连续性知, 存在 $r\in[0,\mu)$, 使得在 $[0,r]$ 上 $w\geqslant v$. 接下来只需证明, 存在 $\theta>0$, 使得在 $[0,r+\theta]$ 上 $w\geqslant v$.

由定理 4.2.2 知, 存在 $\tilde v_k\in C([0,\theta_v],\mathcal{O})$, 满足 $\tilde v_1(t)=v(r)$ 和

$$\tilde v_{k+1}(t)=\mathrm{e}^{t\Delta_\ell}v(r)+\int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)\Delta_\ell}F(\tilde v_k(s))\mathrm{d}s,\quad t\in[0,\theta_v],\quad k=1,2,\cdots,$$

同时 $\tilde v_k$ 收敛于某个 $\tilde v\in\mathcal{S}_m(\theta_v)$, 并且 $\tilde v$ 满足 $\tilde v(0)=v(r)$. 利用半群性质又推出, $\tilde v(t)=v(r+t)$, $t\in[0,\theta_v)$. 由此又知, $\theta_v\in(0,\mu-r)$.

按同样的方式选取 $\tilde w_k\in C([0,\theta_w],\mathcal{O})$. 记 $\theta=\min\{\theta_v,\theta_w\}>0$. 那么, 利用 Fourier 变换可导出算子 $\mathrm{e}^{t\Delta_\ell}$ 的积分表示为

$$(\mathrm{e}^{t\Delta_\ell}F)(x)=(4\pi t)^{-N/2}\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{e}^{-|x-y|^2/(4t)}F(y)\mathrm{d}y,\quad F\in L^\infty(\mathbb{R}^N),\ x\in\mathbb{R}^N.$$

这说明 $\mathrm{e}^{t\Delta_\ell}$ 是正算子. 因此

$$\mathrm{e}^{t\Delta_\ell}(w(r)-v(r))\geqslant 0,\quad t\geqslant 0.$$

如果 $\tilde w_k\geqslant\tilde v_k$ 在 $[0,\theta]$ 上成立, 那么根据

$$\tilde w_{k+1}(t)-\tilde v_{k+1}(t)=\mathrm{e}^{t\Delta_\ell}(w(r)-v(r))+\int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)\Delta_\ell}(F(\tilde w_k(s))-F(\tilde v_k(s)))\mathrm{d}s$$

推知, 在 $[0,\theta]$ 上, $\tilde w_{k+1}\geqslant\tilde v_{k+1}$. 因为在 C_ℓ 中, $\tilde w_k$ 和 $\tilde v_k$ 分别收敛于 $\tilde w$ 和 $\tilde v$, 所以 $\tilde w\geqslant\tilde v$ 在 $[0,\theta]$ 上成立. 再利用 $\tilde v(t)=v(r+t)$, $\tilde w(t)=w(r+t)$ 便知, $w\geqslant v$ 在 $[r,r+\theta]$ 上成立. 证毕.

对于 $F(u)=\dfrac{1}{1-u}$, $b=\infty$, $a=1$, 由定理 5.1.1 知，问题 (5.1) 的解的最大存在时间 τ_0 满足

$$\frac{1}{2}[1-\sup_x u_0(x)]^2 \leqslant \tau_0 \leqslant \frac{1}{2}[1+\inf_x u_0(x)]^2.$$

关于稳定性，有与常微分方程相同的结果.

定理 5.1.2 假设存在 $c\in(a,b)$, 使得 $F(c)=0$, $F'(c)<0$. 则对每一个 $\mu\in(0,-F'(c))$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $\|u_0-c\|_\infty<\delta$ 时， $u\in\mathcal{S}_m(\infty)$, 并且成立

$$\|u(t)-c\|_\infty \leqslant \|u_0-c\|_\infty \mathrm{e}^{-\mu t}, \qquad t\geqslant 0.$$

证明 记 $A=-\Delta_\ell-F'(c)$, $\bar{F}(v)=F(c+v)-F'(c)v$. 显然有 $\|\mathrm{e}^{-tA}\|_\infty\leqslant \mathrm{e}^{F'(c)t}$, 并且对于 $\varepsilon=-F'(c)-\mu$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $\|v\|_\infty<\delta$ 时， $\|\bar{F}(v)\|_\infty\leqslant\varepsilon\|v\|_\infty$. 由定理 4.2.6 知，对于 $v(0)=u_0-c$, 存在 $v\in\mathcal{S}_m(\infty)_{A,\bar{F}}$ 满足 $v(0)=u_0-c$ 和 $\|v(t)\|_\infty\leqslant\|v(0)\|_\infty\mathrm{e}^{-\mu t}$. 从而由 (4.6) 式容易看出， $v+c\in\mathcal{S}_m(\infty)$. 再由解的唯一性知， $v+c=u$.

同于常微分方程，当 $F'(c)>0$ 时，也可以得到关于解的不稳定性结论，其证明方法将在 7.5 节给出.

§5.2 初边值问题

本节假设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界开集， $\partial\Omega\in C^2$. 记 $X=C_0(\Omega)$, $Y=L^2(\Omega)$. 此外，进一步假设 $F\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 且满足 $F(0)=0$.

对于给定的 $u_0\in X$, 本节的目的是寻找 $T>0$ 以及下述问题的解 u：

$$u\in C([0,T],X)\cap C((0,T],H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))\cap C^1((0,T],L^2(\Omega)), \tag{5.3}$$

$$\begin{cases} u_t-\Delta u=F(u), \quad \forall\, t\in(0,T], \\ u(0)=u_0. \end{cases} \tag{5.4}$$

根据定义，如果 u 满足 (5.3) 式和 (5.4) 式，那么 u 是问题 (5.4) 的古典解.

由 2.5.1 节的结果知道，算子 $-\Delta$ 在定义域 $D(-\Delta)=H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ 上是 m-增生算子且是稠定的. 从而由定理 3.2.8 推出， Δ 是收缩半群 $Q(t)=\mathrm{e}^{t\Delta}$ 的无穷小生成元. 再利用 3.4 节的结论知， $-\Delta$ 是扇形算子，并且 $Q(z)=\mathrm{e}^{z\Delta}$ 是解析半群. 根据定理 4.2.2 和定理 4.2.3 又推知，问题 (5.4) 有唯一适度解 u, 即 u 满足

$$u(t)=Q(t)u_0+\int_0^t Q(t-s)F(u(s))\mathrm{d}s, \quad t\in[0,T]. \tag{5.5}$$

如果 u 满足 (5.3) 式和 (5.4) 式, 类似于定理 3.5.1 的证明, 可推出 u 满足 (5.5) 式. 为了说明其逆命题为真, 即证明: 如果 u 满足 (5.5) 式, 那么它一定满足 (5.3) 式和 (5.4) 式, 我们需要对半群 $Q(t)=\mathrm{e}^{t\Delta}$ 做一些估计.

5.2.1 齐次问题

定理 5.2.1 设 $u_0\in L^2(\Omega)$, 且记 $u(t)=Q(t)u_0$. 那么 u 是问题

$$u\in C([0,\infty),L^2(\Omega))\cap C^1((0,\infty),L^2(\Omega)),\ \Delta u\in C((0,\infty),L^2(\Omega)),\tag{5.6}$$

$$\begin{cases} u_t-\Delta u=0, \quad \forall\, t>0,\\ u(0)=u_0\end{cases}\tag{5.7}$$

的唯一解. 此外还有

$$u\in C((0,\infty),\qquad H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)),\tag{5.8}$$

$$\|\Delta u\|_2\leqslant 2^{-1/2}t^{-1}\|u_0\|_2,\qquad \forall\, t>0,\tag{5.9}$$

$$\|\nabla u\|_2\leqslant (2t)^{-1/2}\|u_0\|_2,\qquad \forall\, t>0.\tag{5.10}$$

证明 解的唯一性可由定理 3.2.1 的结论 (7) 推出. 由定理 3.3.12 得

$$u(t)=Q(t)u_0\in D(A)=H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),\qquad \forall\, t>0.$$

因此由定理 3.2.1 的结论 (4) 知, $u(t)$ 满足 (5.7) 式的方程. 同时, 由定理 3.2.1 的结论 (2) 和结论 (4) 又知, $u(t)$ 满足 (5.6) 式和 (5.8) 式. 此外, $u\in C^\infty((0,\infty),H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$.

对于 $t>0$, 分别用 $u(t)$, $\Delta u(t)$ 和 $\Delta u'(t)$ 乘 (5.7) 式的方程, 再在 Ω 上积分得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|_2^2=2\langle\Delta u(t),\qquad u(t)\rangle=-2\|\nabla u(t)\|_2^2,\tag{5.11}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u(t)\|_2^2=-2\langle\Delta u(t),\qquad u'(t)\rangle=-2\|u'(t)\|_2^2,\tag{5.12}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u'(t)\|_2^2=2\langle\Delta u'(t),\qquad u'(t)\rangle=-2\|\nabla u'(t)\|_2^2.\tag{5.13}$$

从 (5.12) 式和 (5.13) 式推出, $\|\nabla u(t)\|_2^2$ 和 $\|u'(t)\|_2^2$ 关于 t 都是非增的. 从 0 到 t 积分 (5.11) 式便得

$$t\|\nabla u(t)\|_2^2\leqslant\int_0^t\|\nabla u(s)\|_2^2\mathrm{d}s=\frac12\|u_0\|_2^2-\frac12\|u(t)\|_2^2\leqslant\frac12\|u_0\|_2^2,\qquad \forall t>0,\tag{5.14}$$

从而 (5.10) 式成立. 再由 (5.12) 式得

$$t^2\|u'(t)\|_2^2 \leqslant 2\int_0^t s\|u'(s)\|_2^2\mathrm{d}s = -\int_0^t s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|\nabla u(s)\|_2^2\mathrm{d}s \leqslant \int_0^t \|\nabla u(s)\|_2^2\mathrm{d}s.$$

联立上式与 (5.14) 推出, $2t^2\|u'(t)\|_2^2 \leqslant \|u_0\|_2^2$. 于是, (5.9) 式成立. 证毕.

定理 5.2.2 在定理 5.2.1 中, 若进一步假设 $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, 则 $u \in C([0,\infty), H_0^1(\Omega))$, 并且成立

$$\|\Delta u\|_2 \leqslant (2t)^{-1/2}\|\nabla u_0\|_2, \qquad \forall\, t > 0. \tag{5.15}$$

此外, 如果又设 $\Delta u_0 \in L^2(\Omega)$, 那么 $u \in C^1([0,\infty), L^2(\Omega))$, $\Delta u \in C([0,\infty), L^2(\Omega))$, 并且 (5.7) 式的方程在 $t=0$ 处成立.

证明 首先假设 $u_0 \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$. 利用定理 3.2.1 的结论 (4) 知, $u \in C([0,\infty), H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$, 并且 (5.7) 式的方程在 $t=0$ 处成立. 因为 $\|u'(t)\|_2^2$ 关于 t 非增 (见定理 5.2.1 的证明), 所以由 (5.12) 式得

$$\begin{aligned}2t\|\Delta u(t)\|_2^2 = 2t\|u'(t)\|_2^2 &\leqslant 2\int_0^t \|u'(s)\|_2^2\mathrm{d}s\\ &= -\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|\nabla u(s)\|_2^2\mathrm{d}s \leqslant \|\nabla u_0\|_2^2.\end{aligned}$$

从而 (5.15) 式成立.

当 $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ 时, 利用稠密性可推知, (5.15) 式仍然成立. 现在只需证明 $u \in C([0,\infty), H_0^1(\Omega))$. 根据 (5.8) 式, 只要证明当 $t\to 0$ 时, 在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u(t)\to u_0$ 即可. 事实上, 由 (5.12) 式知

$$\int_0^1 \|\Delta u(s)\|_2^2\mathrm{d}s = \int_0^1 \|u'(s)\|_2^2\mathrm{d}s = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|\nabla u(s)\|_2^2\,\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2,$$

$$\|\nabla u(t)\|_2^2 - \|\nabla u_0\|_2^2 = -2\int_0^t \|\Delta u(s)\|_2^2\mathrm{d}s.$$

所以, 当 $t\to 0$ 时, $\|\nabla u(t)\|_2 \to \|\nabla u_0\|_2$, 从而在 $L^2(\Omega)$ 中, $\nabla u(t)\to\nabla u_0$. 又因为在 $L^2(\Omega)$ 中, $u(t)\to u_0$. 故结论成立. 证毕.

定理 5.2.3 设 λ 是 $-\Delta$ 带有齐次 Dirichlet 边界条件的第一特征值, 则成立

$$\|Q(t)\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda t}, \qquad \forall\, t \geqslant 0. \tag{5.16}$$

证明 首先假设 $u_0 \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$. 记

$$u(t) = Q(t)u_0, \qquad f(t) = \mathrm{e}^{2\lambda t}\|u(t)\|_2^2, \qquad t \geqslant 0,$$

直接计算知

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-2\lambda t}f'(t) &= 2\lambda\int_\Omega u^2(t)\mathrm{d}x + 2\int_\Omega u(t)u'(t)\mathrm{d}x \\
&= 2\lambda\int_\Omega u^2(t)\mathrm{d}x + 2\int_\Omega u(t)\Delta u(t)\mathrm{d}x \\
&= 2\lambda\int_\Omega u^2(t)\mathrm{d}x - 2\int_\Omega |\nabla u(t)|^2\mathrm{d}x \\
&\leqslant 0.
\end{aligned}$$

因此，对任意 $t\geqslant 0$ 和 $u_0\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, 有 $\|Q(t)u_0\|_2=\|u(t)\|_2\leqslant \mathrm{e}^{-\lambda t}\|u_0\|_2$. 再利用稠密性可推知，当 $u_0\in L^2(\Omega)$ 时，该估计式也成立．证毕.

定理 5.2.4 对于 $1\leqslant q\leqslant p\leqslant\infty$, 有

$$\|Q(t)\varphi\|_p\leqslant (4\pi t)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}\|\varphi\|_q,\qquad \forall\, t>0,\ \varphi\in C_0(\Omega). \tag{5.17}$$

该定理的证明需要借助于下面的两个引理.

引理 5.2.5 对于 $t>0$, 定义速降函数 $K(t)=(4\pi t)^{-N/2}\mathrm{e}^{-|x|^2/(4t)}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. 设 $\psi\in C_c(\mathbb{R}^N)$, 并记 $v(t)=K(t)*\psi$. 那么

$$v\in C([0,\infty),\,C_b(\mathbb{R}^N))\cap C^\infty((0,\infty),\,C_b^2(\mathbb{R}^N)),$$

并且对任意 $1\leqslant p\leqslant\infty$, 有

$$v\in C([0,\infty),L^p(\mathbb{R}^N))\cap C^\infty((0,\infty),\,L^p(\mathbb{R}^N)).$$

此外还有

(1) $v_t=\Delta v$ 对所有 $t>0$ 成立，且 $v(0)=\psi$;

(2) $\|v(t)\|_p\leqslant (4\pi t)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}\|\psi\|_q$ 对所有 $t>0$ 和 $1\leqslant q\leqslant p\leqslant\infty$ 成立.

证明 经简单计算可得正则性和性质 (1). 下证性质 (2). 因为

$$\|K(t)\|_p=p^{-\frac{N}{2p}}(4\pi t)^{-\frac{N}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\leqslant (4\pi t)^{-\frac{N}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)},\qquad 1\leqslant p\leqslant\infty,\ t>0,$$

所以利用 Young 不等式 (引理 2.5.8) 可推出性质 (2)．证毕.

引理 5.2.6 设 $\varphi\in L^2(\Omega)$, $\varphi\geqslant 0$ 在 Ω 上几乎处处成立．则对任意 $t>0$, $Q(t)\varphi\geqslant 0$ 在 Ω 上几乎处处成立.

证明 根据稠密性，不妨假设 $\varphi\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$. 记 $u(t)=Q(t)\varphi$, 并考察 $u^-\in C([0,\infty),\,H_0^1(\Omega))$. 根据定理 5.2.1, 对任意 $t>0$, 有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega (u^-)^2\mathrm{d}x &= -\int_\Omega u_t u^-\mathrm{d}x = -\int_\Omega u^-\Delta u\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla u^-\mathrm{d}x = -\int_\Omega |\nabla u^-|^2\mathrm{d}x\leqslant 0.
\end{aligned}$$

由于 $u^-(0)=\varphi^-=0$, 所以 $\int_\Omega (u^-)^2(t)\mathrm{d}x \leqslant 0$ 对所有 $t>0$ 成立. 于是, $u(t)\geqslant 0$ 在 Ω 上几乎处处成立. 证毕.

证明定理 5.2.4 根据稠密性, 不妨假设 $\varphi\in C_0(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. 令 $\zeta=|\varphi|\in C_0(\Omega)$. 由引理 5.2.6 知, 对任意 $t>0$, 有

$$-Q(t)\,\zeta \leqslant Q(t)\varphi \leqslant Q(t)\,\zeta, \qquad \text{a.e.} \quad x\in\Omega.$$

从而

$$\|Q(t)\varphi\|_p \leqslant \|Q(t)\zeta\|_p. \tag{5.18}$$

定义函数 $\psi\in C_c(\mathbb{R}^N)$：

$$\psi(x)=\begin{cases}\zeta(x), & x\in\Omega,\\ 0, & x\in\mathbb{R}^N\setminus\Omega,\end{cases}$$

并令 $v(t)=K(t)*\psi$, $u(t)=v(t)|_\Omega-Q(t)\zeta$. 那么

$$u\in C([0,\infty),\,C(\bar\Omega))\cap C((0,\infty),\,H^1(\Omega))\cap C^1((0,\infty),L^2(\Omega)),$$

并且 $\Delta u\in C((0,\infty),L^2(\Omega))$. 进一步还有, 在 $\partial\Omega$ 上 $u(t)=v(t)\geqslant 0$, 当 $t>0$ 时, $u_t=\Delta u$, 在 Ω 内, $u(0)=0$. 于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega (u^-)^2\mathrm{d}x &= -\int_\Omega u_t u^-\mathrm{d}x = -\int_\Omega u^-\Delta u\mathrm{d}x\\ &= \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla u^-\mathrm{d}x = -\int_\Omega |\nabla u^-|^2\mathrm{d}x \leqslant 0.\end{aligned}$$

从而对任意 $t\geqslant 0$, 有 $u(t)\geqslant 0$, 即 $v(t)|_\Omega\geqslant Q(t)\zeta$. 再由 (5.18) 式知

$$\|Q(t)\varphi\|_p \leqslant \|v(t)\|_p.$$

最后运用引理 5.2.5 的结论 (2) 可推出 (5.17) 式. 定理 5.2.4 得证.

推论 5.2.7 设 λ 是 $-\Delta$ 带有齐次 Dirichlet 边界条件的第一特征值, 并记 $M=\exp\left\{\frac{\lambda|\Omega|^{2/N}}{4\pi}\right\}$. 那么

$$\|Q(t)\|_{\mathcal{L}(C_0(\Omega))} \leqslant M\mathrm{e}^{-\lambda t}, \qquad \forall\, t\geqslant 0. \tag{5.19}$$

证明 设 $\varphi\in C_0(\Omega)$, $T>0$. 则当 $0\leqslant t\leqslant T$ 时, 有

$$\|Q(t)\varphi\|_\infty \leqslant \|\varphi\|_\infty \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{\lambda T}\|\varphi\|_\infty.$$

当 $t \geqslant T$ 时，利用 (5.17) 式和 (5.16) 式推出

$$\begin{aligned}\|Q(t)\varphi\|_\infty &= \|Q(T)Q(t-T)\varphi\|_\infty \leqslant (4\pi T)^{-N/4}\|Q(t-T)\varphi\|_2 \\ &\leqslant (4\pi T)^{-N/4}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{\lambda T}\|\varphi\|_2 \leqslant |\Omega|^{1/2}(4\pi T)^{-N/4}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{\lambda T}\|\varphi\|_\infty.\end{aligned}$$

取 $T = |\Omega|^{2/N}/(4\pi)$, 即知结论成立.

再考虑 $L^p(\Omega)$ 中的估计. 利用 (5.19) 式及 (5.17) 式易证，对任意 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 存在正常数 M_p, 使得

$$\|Q(t)\|_{\mathcal{L}(L^p)} \leqslant M_p\mathrm{e}^{-\lambda t}, \qquad \forall\, t > 0.$$

5.2.2 问题 (5.4) 的古典解的局部存在性

定理 5.2.8 设 $u_0 \in C_0(\Omega)$, $T > 0$, $u \in C([0,T], C_0(\Omega))$. 那么 u 是问题 (5.3) 和 (5.4) 的解当且仅当 u 满足 (5.5) 式.

证明 假设 u 是问题 (5.3) 和 (5.4) 的解. 同于定理 3.5.1 的证明，可推出 u 满足 (5.5) 式.

反之，假设 $u \in C([0,T], C_0(\Omega))$ 是 (5.5) 的解. 对于 $0 < t < T$, 由定理 5.2.1 知， $Q(t)u_0 \in H_0^1(\Omega)$, 函数 $s \mapsto Q(t-s)F(u(s))$ 属于 $C([0,t), H_0^1(\Omega))$, 并且满足

$$\begin{aligned}\|Q(t-s)F(u(s))\|_{H^1} &\leqslant \{2(t-s)\}^{-1/2}\|F(u(s))\|_2 \\ &\leqslant C(t-s)^{-1/2} \in L^1(0,t).\end{aligned}$$

由命题 1.2.7 知，$u(t) \in H_0^1(\Omega)$. 采用类似的估计还可以推知，$u \in C((0,T], H_0^1(\Omega))$, 且有

$$\|u(t)\|_{H^1} \leqslant C(1 + t^{-1/2}).$$

因为 F 在 $\mathbb{R}$ 的有界集上 Lipschitz 连续，且 u 有界，所以 $F(u(t)) \in H_0^1(\Omega)$, 并且成立

$$\|F(u(t))\|_{H^1} \leqslant C(1 + t^{-1/2}).$$

从而由定理 5.2.1 和定理 5.2.2 知， $\Delta Q(t)u_0$, $\Delta Q(t-s)F(u(s)) \in L^2(\Omega)$, 并且还有

$$\begin{aligned}\|\Delta Q(t-s)F(u(s))\|_2 &\leqslant C(t-s)^{-1/2}\|\nabla F(u(s))\|_2 \\ &\leqslant C(t-s)^{-1/2}(1 + s^{-1/2}) \in L^1(0,t).\end{aligned}$$

由于 Δ 是闭算子，因此根据命题 1.2.11 知

$$\Delta u(t) = \Delta Q(t)u_0 + \int_0^t \Delta Q(t-s)F(u(s))\mathrm{d}s \in L^2(\Omega), \qquad \forall\, t \in [0,T].$$

因而，对任意 $t \in (0,T]$, 有 $u(t) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. 类似可证 $u \in C((0,T), H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$. 令

$$v(s) = u(\varepsilon + s), \qquad 0 \leqslant s \leqslant t - \varepsilon,$$

则

$$v(s) = Q(s)u(\varepsilon) + \int_0^s Q(s-\sigma)F(v(\sigma))\mathrm{d}\sigma, \qquad s \in [0, T-\varepsilon].$$

再利用定理 4.2.7 知，结论成立．证毕．

注 5.2.1 如果更详细地研究上面的估计，那么作为定理 5.2.1 的推论，还有

$$\|\nabla u(t)\|_2 \leqslant C|\Omega|^{1/2}(t^{-1/2} + t^{1/2}),$$
$$\|\Delta u(t)\|_2 \leqslant C|\Omega|^{1/2}(t^{-1} + t),$$

其中常数 C 仅依赖于 F 和 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_\infty$.

注 5.2.2 用类似的方法易证，若 $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, 则

$$\|\nabla u(t)\|_2 \leqslant C(1 + t^{1/2}), \qquad \|\Delta u(t)\|_2 \leqslant C(t^{-1/2} + t),$$

其中常数 C 仅依赖于 F, $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_\infty$, $|\Omega|$ 和 $\|u_0\|_{H^1}$.

注 5.2.3 运用同样的方法还可以证明，若进一步假设 $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, 则

$$\|\Delta u(t)\|_2 \leqslant C(1 + t),$$

其中常数 C 仅依赖于 F, $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_\infty$, $|\Omega|$ 和 $\|u_0\|_{H^2}$.

根据定理 4.2.2, 定理 4.2.8 和定理 5.2.8, 可以推出

定理 5.2.9 对任意 $u_0 \in C_0(\Omega)$, 存在唯一函数 u, 其最大存在区间为 $[0, \tau_0)$, 使得对任意 $T \in (0, \tau_0)$, u 是问题 (5.3) 和 (5.4) 的解．此外，若 $\tau_0 < \infty$, 则当 $t \nearrow \tau_0$ 时， $\|u(t)\|_\infty \to \infty$.

下面的结论说明，如果 u_0 有更好的正则性，那么相应地， u 也有更好的正则性.

定理 5.2.10 若 $u_0 \in C_0(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, 则问题 (5.3) 和 (5.4) 的解 $u \in C([0,\tau_0), H_0^1(\Omega))$. 如果进一步假设 $\Delta u_0 \in L^2(\Omega)$, 那么

$$u \in C([0,\tau_0), H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap C^1([0,\tau_0), L^2(\Omega)).$$

证明 设 $u_0 \in C_0(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $t \in (0, \tau_0)$. 则由定理 5.2.8 知， u 满足 (5.5)

式. 从而由 (5.5) 式和 (5.10) 式得

$$\|u(t)-u_0\|_{H^1} \leqslant \|Q(t)u_0-u_0\|_{H^1} + C\int_0^t (t-s)^{-1/2}\|F(u(s))\|_2 \mathrm{d}s$$
$$\leqslant \|Q(t)u_0-u_0\|_{H^1} + C\sqrt{t} \to 0, \quad \text{当}\, t\to 0^+ \,\text{时}.$$

由此推出，$u \in C([0,\tau_0), H_0^1(\Omega))$. 特别地，如果 $T<\tau_0$, 那么对任意 $t\in[0,T]$, u 在空间 $H_0^1(\Omega)$ 中有界，从而 $F(u)$ 也有界. 因而当 $\Delta u_0 \in L^2(\Omega)$ 时，由 (5.5) 式和 (5.15) 式知，当 $t\to 0^+$ 时，有

$$\|\Delta(u(t)-u_0)\|_2 \leqslant \|(Q(t)-I)\Delta u_0\|_2 + C\int_0^t (t-s)^{-1/2}\|F(u(s))\|_{H^1}\mathrm{d}s \to 0,$$

于是，$u\in C([0,\tau_0), H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$. 特别地，当 $t\to 0^+$ 时，在 $L^2(\Omega)$ 中 $u_t(t)\to \Delta u_0 + F(u_0)$. 此外，对 $t<\tau_0$, 我们有

$$\frac{u(t)-u_0}{t} = \frac{Q(t)-I}{t}u_0 + \frac{1}{t}\int_0^t Q(t-s)F(u(s))\mathrm{d}s,$$

因为上式右端项当 $t\to 0^+$ 时趋于 $\Delta u_0 + F(u_0)$, 所以 $\dfrac{\mathrm{d}^+u}{\mathrm{d}t}(0) = \lim\limits_{t\to 0^+} u_t(t)$, 进而得到 $u\in C^1([0,\tau_0), L^2(\Omega))$. 证毕.

5.2.3 问题 (5.4) 的古典解的整体存在性

本节，我们将建立两类整体存在性结果. 首先证明，如果对较大的 $|u|$, $F(u)$ 满足某种条件，那么问题 (5.3) 和 (5.4) 的所有解都整体存在. 其次证明，如果对较小的 $|u|$, $F(u)$ 满足某种条件，那么对于小初值，问题 (5.3) 和 (5.4) 的解整体存在. 为此，先证明下面的 **最大值原理**.

命题 5.2.11 设 $T>0$, $u_0\in C_0(\Omega)$, $f\in C([0,T], C_0(\Omega))$. 假定

$$u\in C([0,T], C_0(\Omega))\cap C((0,T), H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))\cap C^1((0,T), L^2(\Omega))$$

满足

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & t\in(0,T), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{5.20}$$

进一步，假设存在正常数 C, 使得

$$|f(t,x)| \leqslant C|u(t,x)|, \qquad (t,x)\in[0,T]\times\bar{\Omega}. \tag{5.21}$$

那么，由 $u_0\geqslant 0$ 可推出 $u(t,x)\geqslant 0$ 在 $[0,T]\times\bar{\Omega}$ 上成立.

证明 对于 $t\in(0,T)$, 令 $v(t)=\int_\Omega(u^-(t))^2\mathrm{d}x$. 用 $-u^-(t)$ 乘 (5.20) 式中的方程并在 Ω 上积分，再利用 (5.21) 式 (参见引理 5.2.6 的证明), 我们有

$$v'(t)\leqslant\int_\Omega|f(t)|u^-(t)\mathrm{d}x\leqslant C\int_\Omega|u(t)|u^-(t)\mathrm{d}x=Cv(t),\qquad t>0.$$

由此推出，对任意 $0<s\leqslant t<T$, 有 $v(t)\leqslant v(s)\mathrm{e}^{C(t-s)}$. 令 $s\to0^+$, 即得

$$v(t)\leqslant\mathrm{e}^{Ct}\int_\Omega(u_0^-)^2\mathrm{d}x=0,\qquad\forall\,t\in(0,T).$$

证毕.

注 5.2.4 把命题 5.2.11 用于 $-u$ 就得到, 若 $u_0\leqslant0$, 则 $u(t,x)\leqslant0$ 在 $[0,T]\times\bar{\Omega}$ 上成立.

我们先给出关于整体存在性的第一个结论.

定理 5.2.12 假设存在正常数 K 和 C, 使得

$$uF(u)\leqslant Cu^2,\qquad\forall\,|u|\geqslant K.\tag{5.22}$$

则对任意 $u_0\in C_0(\Omega)$, 由定理 5.2.9 所确定的问题 (5.3) 和 (5.4) 的解都整体存在.

证明 第一步 先假设 $u_0\geqslant0$. 易证，对任意 $T<\tau_0$, $h(t)=F(u(t))$ 满足 (5.21) 式. 所以， $u(t)\geqslant0$ 在 $[0,\tau_0)$ 上成立. 从而，由 (5.22) 式知，当 $u\geqslant K$ 时, $F(u)\leqslant Cu$ 成立. 由于 F 在 $[0,K]$ 上有界，因此只要适当变动常数 C, 就有

$$F(u)\leqslant C+Cu,\qquad\forall\,u\geqslant0.$$

于是

$$\|F^+(u(t))\|_\infty\leqslant C+C\|u(t)\|_\infty,\qquad\forall\,t\in[0,\tau_0).$$

利用 (5.5) 式， (5.19) 式和 Gronwall 引理，我们有

$$\|u(t)\|_\infty\leqslant(C+\|u_0\|_\infty)\,\mathrm{e}^{Ct},\qquad\forall\,t\in[0,\tau_0).\tag{5.23}$$

再利用定理 5.2.9 知， $\tau_0=\infty$.

第二步 对于一般情形，令 $\psi=|u_0|$, 并记 v 是问题 (5.3) 和 (5.4) 以 ψ 为初值的解. 设 $T<\min\{\tau(\psi),\tau_0\}=\tau_0$(因为 $\tau(\psi)=\infty$) . 因为函数 F 在 $\mathbb{R}$ 上局部 Lipschitz 连续，所以易证 $w=v-u$ 满足命题 5.2.11 的条件，从而 $u(t)\leqslant v(t)$ 在 $[0,T]$ 上成立. 设 $\underline{v}$ 是下面积分方程的极大定义解:

$$\underline{v}=Q(t)\psi+\int_0^tQ(t-s)\{-F(-\underline{v})\}\mathrm{d}s,$$

且记 $z=\underline{v}+u$. 因为 $-F(-u)$ 满足与 $F(u)$ 相同的条件, 所以由第一步的结论知, $\underline{v}$ 整体存在. 于是由命题 5.2.11 知, 对任意 $t\in[0,T]$, 有 $u(t)\geqslant-\underline{v}(t)$. 进而又推出

$$\|u(t)\|_\infty\leqslant\max\{\|v(t)\|_\infty,\ \|\underline{v}(t)\|_\infty\},\qquad\forall\ t\in[0,T].$$

故 $\tau_0\geqslant\tau(\psi)=\infty$. 证毕.

注 5.2.5 如果 (5.22) 式中的 $C=0$, 那么由 (5.23) 式推知, 存在正常数 C_1, 使得问题 (5.3) 和 (5.4) 的所有解都满足

$$\|u(t)\|_\infty\leqslant C_1+\|u_0\|_\infty,\qquad\forall\ t>0.$$

事实上, 下面的命题给出了一个更为精确的结果.

命题 5.2.13 假设 (5.22) 中的 $C=0$, 那么问题 (5.3) 和 (5.4) 的所有解都满足

$$\|u(t)\|_\infty\leqslant\max\{K,\ \|u_0\|_\infty\},\qquad\forall\ t>0.$$

证明 同于定理 5.2.12 的证明, 只需讨论 $u_0\geqslant0$ 的情况. 由 (5.22) 式知, 当 $u\geqslant K$ 时, $F(u)\leqslant0$. 记 $k=\max\{K,\|u_0\|_\infty\}$, $f(t)=\displaystyle\int_\Omega((u-k)^+)^2\mathrm{d}x$. 用 $(u-k)^+\in H_0^1(\Omega)$ 乘以 (5.4) 式中的方程, 并在 Ω 上积分得

$$\begin{aligned}f'(t)&\leqslant-2\int_\Omega|\nabla(u-k)^+|^2\mathrm{d}x+2\int_\Omega F(u(t))(u(t)-k)^+\mathrm{d}x\\&\leqslant2\int_\Omega F(u(t))(u(t)-k)^+\mathrm{d}x\leqslant0.\end{aligned}$$

由此推出 $f(t)\leqslant f(0)=0$, 从而 $u\leqslant k$. 证毕.

当 (5.22) 式中的常数 C 很小时, 类似的结论仍然成立. 下面记 λ 为 $-\Delta$ 带有齐次 Dirichlet 边界条件的第一特征值. 显然, $\lambda>0$.

定理 5.2.14 如果 (5.22) 式中的常数 $C<\lambda$, 那么对任意 $u_0\in C_0(\Omega)$, 问题 (5.3) 和 (5.4) 的解 u 满足

$$\sup_{0\leqslant t<\infty}\|u(t)\|_\infty<\infty.$$

证明 直接由假设条件知, 存在正常数 C_1, 使得 $uF(u)\leqslant C_1+Cu^2$. 同于定理 5.2.12 的证明, 不妨假设 $u_0\geqslant0$. 令 $f(t)=\displaystyle\int_\Omega u^2(t)\mathrm{d}x$. 用 u 乘以 (5.4) 式中的方程, 然后在 Ω 上积分, 并注意到

$$\int_\Omega|\nabla u(t)|^2\mathrm{d}x\geqslant\lambda\int_\Omega u^2(t)\mathrm{d}x,$$

我们有

$$f'(t) \leqslant -2\lambda f(t) + 2\int_\Omega u(t)F(u(t))\mathrm{d}x \leqslant -2(\lambda - C)f(t) + 2C_1|\Omega|.$$

于是

$$f(t) \leqslant f(0) + 2C_1\frac{|\Omega|}{2(\lambda - C)}, \qquad \forall\, t \geqslant 0,$$

进而又得到，$\sup\limits_{0\leqslant t<\infty}\|u(t)\|_2 := \tilde{K} < \infty$. 设 $p \in (2 + N/2, \infty)$, 由 (5.17) 式和 (5.19) 式得

$$\begin{aligned}\|Q(t)\varphi\|_\infty &= \|Q(t/2)Q(t/2)\varphi\|_\infty \leqslant M\mathrm{e}^{-\lambda t/2}\|Q(t/2)\varphi\|_\infty \\ &\leqslant M\mathrm{e}^{-\lambda t/2}(2\pi t)^{-N/(2p)}\|\varphi\|_p, \qquad \forall\, \varphi \in C_0(\Omega).\end{aligned}$$

从而

$$\|Q(t)\|_{\mathcal{L}(L^p,L^\infty)} \leqslant M(2\pi)^{-N/(2p)}\mathrm{e}^{-\lambda t/2}t^{-N/(2p)} \in L^1(0,\infty).$$

因为 $u(t) \geqslant 0$, 同于定理 5.2.12 的证明可知

$$\|F^+(u(t))\|_p \leqslant C_2 + C\|u(t)\|_p, \qquad \forall\, t \geqslant 0.$$

根据

$$\begin{aligned}0 \leqslant u(t) &= Q(t)u_0 + \int_0^t Q(t-s)F(u(s))\mathrm{d}s \\ &\leqslant Q(t)u_0 + \int_0^t Q(t-s)F^+(u(s))\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

便推出

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_\infty &\leqslant \|u_0\|_\infty + (C_2 + C\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\|u(s)\|_p)\int_0^t \|Q(t-s)\|_{\mathcal{L}(L^p,L^\infty)}\mathrm{d}s \\ &\leqslant C_3 + C_4\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\|u(s)\|_p, \qquad \forall\, t \geqslant 0.\end{aligned}$$

从而由 Young 不等式 ($p > 2$) 知，对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正常数 $C(\varepsilon)$, 使得

$$\|u(t)\|_p \leqslant \varepsilon\|u(t)\|_\infty + C(\varepsilon)\|u(t)\|_2, \qquad \forall\, t \geqslant 0.$$

取 $\varepsilon > 0$, 使得 $\varepsilon C_4 \leqslant 1/2$. 则有

$$\|u(t)\|_\infty \leqslant C_3 + \tilde{K}C(\varepsilon)C_4 + \frac{1}{2}\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\|u(s)\|_\infty, \qquad \forall\, t \geqslant 0.$$

因此

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\|u(s)\|_\infty\leqslant 2\big(C_3+\tilde{K}C(\varepsilon)C_4\big),\qquad \forall\, t\geqslant 0.$$

证毕.

接下来证明，如果在 0 的邻域内 F 满足某种条件，那么具有小初值的解整体存在.

定理 5.2.15 假设存在 $\alpha>0$ 和 $0<\mu<\lambda$, 使得当 $|u|\leqslant\alpha$ 时，有

$$uF(u)\leqslant\mu u^2.$$

则存在 $\varepsilon>0$, 使得当 $\|u_0\|_\infty<\varepsilon\alpha$ 时，问题 (5.3) 和 (5.4) 的解 u 整体存在，并且满足

$$\|u(t)\|_\infty\leqslant\alpha\mathrm{e}^{-(\lambda-\mu)t},\qquad \forall\, t\geqslant 0.$$

证明 同于定理 5.2.12 的证明，我们只讨论 $u_0\geqslant 0$ 的情形. 于是 $u(t)\geqslant 0$. 令

$$T=\sup\big\{t\in[0,\tau_0):\ \|u(s)\|_\infty\leqslant\alpha,\quad \forall\, s\in[0,t]\big\}>0,$$

记 $f(t)=\displaystyle\int_\Omega u^2(t)\mathrm{d}x$. 用 u 乘以 (5.4) 式中的方程，并在 Ω 上积分得

$$f'(t)\leqslant -2\lambda f(t)+2\int_\Omega u(t)F(u(t))\mathrm{d}x\leqslant -2(\lambda-\mu)f(t),\qquad \forall t\in[0,T],$$

于是

$$\|u(t)\|_2\leqslant\|u_0\|_2\,\mathrm{e}^{-(\lambda-\mu)t},\qquad \forall\, t\in[0,T].$$

对于 $0\leqslant t\leqslant T$, 把 (5.5) 式写成如下形式:

$$\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}u(t)=\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}Q(t)u_0+\int_0^t\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)(t-s)}Q(t-s)\big\{\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)s}F(u(s))\big\}\mathrm{d}s.$$

注意到 (见定理 5.2.14 的证明)

$$\|\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}Q(t)\|_{\mathcal{L}(L^p,L^\infty)}\in L^1(0,\infty),$$

所以，同于定理 5.2.14 的证明可知，对任意 $t\in[0,T]$, 都有

$$\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}\|u(t)\|_\infty\leqslant\mathrm{e}^{-\mu t}\|u_0\|_\infty+C\|u_0\|_2+\frac{1}{2}\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\big\{\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)s}\|u(s)\|_\infty\big\}.$$

因此，只要 $\|u_0\|_\infty\leqslant\varepsilon\alpha$ 并且 $\varepsilon\ll 1$, 就有

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\big\{\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)s}\|u(s)\|_\infty\big\}\leqslant 2\big(\|u_0\|_\infty+C\|u_0\|_2\big)\leqslant C\|u_0\|_\infty\leqslant C\varepsilon\alpha<\alpha.$$

由此知， $T=\infty$. 证毕.

如果 F 在 0 的附近有较高的阶数，那么还可以得到更精确的结论.

定理 5.2.16 假设存在常数 $\mu\geqslant 0,\gamma>0$ 和 $\alpha>0$, 使得当 $|u|\leqslant\alpha$ 时，有

$$uF(u)\leqslant\mu|u|^{2+\gamma}.$$

则存在正常数 C 和 ε, 使得当 $\|u_0\|_\infty<\varepsilon$ 时，问题 (5.3) 和 (5.4) 的解 u 整体存在，并且满足

$$\|u(t)\|_\infty\leqslant C\|u_0\|_\infty \mathrm{e}^{-\lambda t},\qquad \forall\, t\geqslant 0.$$

证明 同于定理 5.2.12 的证明，不妨假设 $u_0\geqslant 0$, 从而 $u(t)\geqslant 0$. 首先假设 $\|u_0\|_\infty<\alpha$. 令 $f(t)=\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}\mathrm{e}^{\lambda s}\|u(s)\|_\infty$, 设

$$T=\sup\big\{t\in[0,\tau_0):\ \|u(s)\|_\infty\leqslant\alpha,\qquad \forall\, s\in[0,t]\big\}>0.$$

那么对任意 $t\in[0,T]$, 有 $\|F^+(u(t))\|_\infty\leqslant\mu\|u(t)\|_\infty^{1+\gamma}$. 由 (5.5) 式和 (5.19) 式知，当 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 时，有

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\lambda s}\|u(s)\|_\infty&\leqslant M\|u_0\|_\infty+\mu M\int_0^s \mathrm{e}^{-\gamma\lambda\tau}\{\mathrm{e}^{\lambda\tau}\|u(\tau)\|_\infty\}^{1+\gamma}\mathrm{d}\tau\\&\leqslant M\|u_0\|_\infty+\frac{\mu M}{\gamma\lambda}f^{1+\gamma}(s)\leqslant M\|u_0\|_\infty+\frac{\mu M}{\gamma\lambda}f^{1+\gamma}(t),\end{aligned}$$

其中 M 由推论 5.2.7 给出. 因此

$$f(t)=\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\mathrm{e}^{\lambda s}\|u(s)\|_\infty\leqslant M\|u_0\|_\infty+\frac{\mu M}{\gamma\lambda}f^{1+\gamma}(t).\tag{5.24}$$

考察函数

$$\phi(\xi)=\frac{\mu M}{\gamma\lambda}\xi^{1+\gamma}-\xi,\quad \xi\geqslant 0,$$

则 $-\theta=\min\phi<0$. 通过仔细分析可知，对任意 $a\in(0,\theta)$, 存在 $0<\xi_1(a)<\xi_2(a)$, 使得

$$\phi(\xi)+a<0,\qquad \forall\,\xi_1(a)<\xi<\xi_2(a),\tag{5.25}$$

$$a<\xi_1(a)<a\frac{1+\gamma}{\gamma}<\xi_2(a),\qquad \phi(\xi_1(a))+a=\phi(\xi_2(a))+a=0.\tag{5.26}$$

由 (5.24) 式得

$$\phi(f(t))+M\|u_0\|_\infty\geqslant 0,\quad \forall\, t\in[0,T].\tag{5.27}$$

如果 $M\|u_0\|_\infty<\theta$, 那么根据 (5.25) 式和 (5.27) 式知

$$f(t)\in\big[0,\,\xi_1\big(M\|u_0\|_\infty\big)\big]\cup\big[\xi_2\big(M\|u_0\|_\infty\big),\,\infty\big).$$

因为 $f(0)=\|u_0\|_\infty<M\|u_0\|_\infty<\theta$, 所以利用 (5.26) 式推知, $f(0)<M\|u_0\|_\infty<\xi_1\big(M\|u_0\|_\infty\big)$. 从而, 由 $f(t)$ 的连续性又可推知, 对任意 $t\in[0,T]$, 有 $f(t)\in\big[0,\xi_1\big(M\|u_0\|_\infty\big)\big]$. 取

$$C=M\frac{1+\gamma}{\gamma},\qquad \varepsilon=\min\left\{\frac{\theta}{M},\frac{\alpha}{C}\right\}.$$

则当 $\|u_0\|_\infty<\varepsilon$ 时, $M\|u_0\|_\infty<\theta$ 且 $\|u_0\|_\infty<\alpha$ 成立. 因而由 (5.26) 式得

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\lambda t}\|u(t)\|_\infty&\leqslant f(t)\leqslant\xi_1(M\|u_0\|_\infty)\leqslant M\|u_0\|_\infty\Big(1+\frac{1}{\gamma}\Big)\\&<M\varepsilon\Big(1+\frac{1}{\gamma}\Big)=C\varepsilon\leqslant\alpha.\end{aligned}$$

于是 $T=\infty$, 并且成立

$$\mathrm{e}^{\lambda t}\|u(t)\|_\infty\leqslant M\|u_0\|_\infty\Big(1+\frac{1}{\gamma}\Big)=C\|u_0\|_\infty.$$

证毕.

5.2.4 有限时刻爆破

本节, 我们介绍三种用于研究半线性抛物型方程 (5.4) 的解在有限时刻爆破的方法 —— 特征函数方法、能量方法和凸性方法.

1. 特征函数方法 设 λ 是 $-\Delta$ 带有齐次 Dirichlet 边界条件的第一特征值, φ 是对应的特征函数. 对 φ 进行标准化, 即令 $\int_\Omega\varphi\mathrm{d}x=1$. 众所周知, $\lambda>0,\varphi>0$ 在 Ω 内成立, 并且 $\varphi\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$.

定理 5.2.17 设 $u_0\in C_0(\Omega)$, u 是问题 (5.3) 和 (5.4) 的解. 假设存在正常数 a,b 和 ε, 使得 $F(u)\geqslant au^{1+\varepsilon}-bu$ 对所有 $u\geqslant0$ 成立. 如果 $u_0\geqslant0,\neq0$, 并且满足

$$\int_\Omega u_0\varphi\mathrm{d}x>\left(\frac{\lambda+b}{a}\right)^{1/\varepsilon},\tag{5.28}$$

那么 $\tau_0<\infty$ 并且 $\lim\limits_{t\to\tau_0}\|u(\cdot,t)\|_\infty=\infty$, 即 u 在有限时刻爆破.

证明 由假设条件知, $u(t)\geqslant0$. 记

$$f(t)=\int_\Omega u(t)\varphi\mathrm{d}x\geqslant0,\qquad t\in[0,\tau_0),$$

则有

$$\begin{aligned}f'(t) &= \int_\Omega u_t\varphi \mathrm{d}x = \int_\Omega [\Delta u + F(u)]\varphi \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega u(t)\Delta\varphi \mathrm{d}x + \int_\Omega F(u)\varphi \mathrm{d}x \\ &= -\lambda f(t) + \int_\Omega F(u)\varphi \mathrm{d}x \\ &\geqslant -\lambda f(t) + \int_\Omega [au^{1+\varepsilon} - bu]\varphi \mathrm{d}x \\ &= -(\lambda+b)f(t) + a\int_\Omega \varphi u^{1+\varepsilon}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

利用 Hölder 不等式得

$$f(t) \leqslant \left(\int_\Omega \varphi u^{1+\varepsilon}\mathrm{d}x\right)^{1/(1+\varepsilon)} \left(\int_\Omega \varphi \mathrm{d}x\right)^{\varepsilon/(1+\varepsilon)} = \left(\int_\Omega \varphi u^{1+\varepsilon}\mathrm{d}x\right)^{1/(1+\varepsilon)}.$$

于是

$$f'(t) \geqslant f(t)[-(\lambda+b) + af^\varepsilon(t)], \quad t \in [0, \tau_0).$$

由此知, $\tau_0 < \infty$ 且 $\lim\limits_{t\nearrow\tau_0} f(t) = \infty$. 细节留给读者.

2. 能量方法 对于 $u \in \mathbb{R}$, 记 $G(u) = \int_0^u F(s)\mathrm{d}s$. 对于 $u \in C_0(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, 定义泛函 E:

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega G(u)\mathrm{d}x.$$

引理 5.2.18 设 $T > 0$. 若

$$u \in C((0,T), C_0(\Omega)) \cap C((0,T), H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap C^1((0,T), L^2(\Omega)),$$

则

$$\int_s^t \int_\Omega (\Delta u(\tau) + F(u(\tau)))u_\tau(\tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau + E(u(t)) = E(u(s)), \quad \forall\, 0 < s < t < T.$$

证明 根据稠密性, 不妨假设 $u \in C^1((0,T), H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$. 于是

$$\int_\Omega (\Delta u + F(u))u_\tau \mathrm{d}x = \int_\Omega (-\nabla u \cdot \nabla u_\tau + F(u)u_\tau)\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}E(u(\tau)).$$

从 s 到 t 积分上式, 即得结论.

引理 5.2.19 设 $u_0\in C_0(\Omega)$, u 是问题 (5.3) 和 (5.4) 的解，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^2(t)\mathrm{d}x+2\int_\Omega|\nabla u(t)|^2\mathrm{d}x=2\int_\Omega u(t)F(u(t))\mathrm{d}x, \tag{5.29}$$

$$\int_s^t\int_\Omega u_\tau^2(\tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+E(u(t))=E(u(s)),\quad \forall\ 0<s<t<\tau_0. \tag{5.30}$$

证明 用 u 乘以 (5.4) 式的方程并在 Ω 上积分，就得到 (5.29) 式. 利用引理 5.2.18 和 (5.4) 式可推出 (5.30) 式.

定理 5.2.20 假设存在正常数 K 和 ε, 使得当 $|u|\geqslant K$ 时，有

$$uF(u)\geqslant(2+\varepsilon)G(u).$$

记 $\mu=\min\limits_{0\leqslant|u|\leqslant K}uF(u)$, $\gamma=\max\limits_{0\leqslant|u|\leqslant K}G(u)$. 若 $u_0\in C_0(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ 满足

$$(2+\varepsilon)E(u_0)<|\Omega|[\mu-(2+\varepsilon)\gamma],$$

则 $\tau_0<\infty$ 并且 $\lim\limits_{t\to\tau_0}\|u(\cdot,t)\|_\infty=\infty$, 即 u 在有限时刻爆破.

证明 记 $f(t)=\int_\Omega u^2(t)\mathrm{d}x$. 则由 (5.29) 式知

$$\begin{aligned}f'(t)&=-2\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x+2\int_{\{|u|\leqslant K\}}uF(u)\mathrm{d}x+2\int_{\{|u|>K\}}uF(u)\mathrm{d}x\\&\geqslant-2\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x+2\int_{\{|u|\leqslant K\}}uF(u)\mathrm{d}x+2(2+\varepsilon)\int_{\{|u|>K\}}G(u)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{5.31}$$

另一方面，根据定理 5.2.10, 我们可以在 (5.30) 式中取 $s=0$. 于是

$$\begin{aligned}2(2+\varepsilon)\int_{\{|u|>K\}}G(u)\mathrm{d}x=&-2(2+\varepsilon)\int_{\{|u|\leqslant K\}}G(u)\mathrm{d}x+(2+\varepsilon)\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\\&-2(2+\varepsilon)\left\{E(u_0)-\int_0^t\int_\Omega u_\tau^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right\}.\end{aligned} \tag{5.32}$$

因为 $\mu\leqslant0=uF(u)|_{u=0}=G(0)\leqslant\gamma$, 所以由 μ 和 γ 的定义知

$$2\int_{\{|u|\leqslant K\}}uF(u)\mathrm{d}x-2(2+\varepsilon)\int_{\{|u|\leqslant K\}}G(u)\mathrm{d}x\geqslant2|\Omega|[\mu-(2+\varepsilon)\gamma]. \tag{5.33}$$

根据 (5.31)~(5.33) 式便推出，当 $0\leqslant t\leqslant\tau_0$ 时，有

$$\begin{aligned}f'(t)\geqslant\ &2(2+\varepsilon)\int_0^t\int_\Omega u_\tau^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+\varepsilon\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\\&+2\{|\Omega|[\mu-(2+\varepsilon)\gamma]-(2+\varepsilon)E(u_0)\}.\end{aligned}$$

进而又得到

$$f'(t) > 2(2+\varepsilon)\int_0^t\int_\Omega u_\tau^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau + \varepsilon\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x \geqslant 2(2+\varepsilon)\int_0^t\int_\Omega u_\tau^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau. \tag{5.34}$$

令 $h(t) = \int_0^t f(s)\mathrm{d}s$. 利用 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned} h'(t) - h'(0) &= \int_0^t f'(s)\mathrm{d}s = 2\int_0^t\int_\Omega uu_s\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\ &\leqslant 2\left(\int_0^t\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right)^{1/2}\left(\int_0^t\int_\Omega u_s^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right)^{1/2} \\ &= 2h^{1/2}(t)\left(\int_0^t\int_\Omega u_s^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right)^{1/2} \end{aligned}$$

此式结合 (5.34) 式推出

$$h(t)h''(t) \geqslant 2(2+\varepsilon)h(t)\int_0^t\int_\Omega u_\tau^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \geqslant (1+\varepsilon/2)(h'(t)-h'(0))^2. \tag{5.35}$$

下面采用反证法. 假设 u 整体存在, 即 $\tau_0 = \infty$. 由 (5.34) 式知, $h''(t) = f'(t) > 0$. 于是, 对于 $t > t_1$ 和 $t_1 > 0$, 有 $h'(t) > h'(t_1) > h'(0)$. 由此知, 当 $t \to \infty$ 时, 有

$$h(t) - h(t_1) = \int_{t_1}^t h'(s)\mathrm{d}s \geqslant h'(t_1)(t-t_1) \to \infty.$$

所以当 $t > t_1$ 时, 有

$$\begin{aligned} h''(t)h'(t) &\geqslant \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)(h'(t)-h'(0))^2\frac{h'(t)}{h(t)} \\ &\geqslant \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)[h'(t_1)-h'(0)]^2\frac{h'(t)}{h(t)}. \end{aligned}$$

从而当 $t \to \infty$ 时, 有

$$\frac{1}{2}(h'(t))^2\Big|_{t_1}^t \quad \geqslant \quad \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)[h'(t_1)-h'(0)]^2\ln h(t)\Big|_{t_1}^t \longrightarrow \infty.$$

故 $h'(t) \to \infty$. 因此存在 $t_2 > t_1$, 使当 $t \geqslant t_2$ 时, 有

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)[h'(t)-h'(0)]^2 \geqslant \left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)(h'(t))^2.$$

由此式及不等式 (5.35) 得

$$h(t)h''(t) \geqslant \left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)(h'(t))^2, \qquad t \geqslant t_2,$$

即

$$(h^{-\varepsilon/4}(t))'' \leqslant 0, \qquad \forall\, t \geqslant t_2. \tag{5.36}$$

因为当 $t \to \infty$ 时 $h(t) \to \infty$, 所以 $h^{-\varepsilon/4}(t) \to 0$. 因而存在 $t_0 > t_2$, 使得 $(h^{-\varepsilon/4}(t_0))' < 0$. 由 (5.36) 式知, $(h^{-\varepsilon/4}(t))' < 0$ 对于 $t \geqslant t_0$ 成立, 进而得到

$$0 < h^{-\varepsilon/4}(t) \leqslant h^{-\varepsilon/4}(t_0) + (t-t_0)(h^{-\varepsilon/4}(t_0))', \qquad \forall\, t \geqslant t_0.$$

这是一个矛盾. 故 $\tau_0 < \infty$. 证毕.

3. 凸性方法 先叙述 **凸性引理**, 其证明是初等的, 留给读者作为练习.

引理 5.2.21 设 $J(t) \in C^2([0,T)) \cap C([0,T])$, $J(0) > 0$, $J'(0) < 0$, 并且 $J''(t) \leqslant 0$, $\forall t \in [0,T)$. 如果 $T \geqslant -J(0)/J'(0)$, 那么存在 T_0 : $0 < T_0 \leqslant -J(0)/J'(0)$, 使得 $J(T_0) = 0$.

定理 5.2.22 假设当 $u \geqslant 0$ 时, $F(u) \geqslant 0$ (这里不需要 $F(0) = 0$ 的条件), 初值函数 $u_0 \in C^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $u_0(x) \geqslant 0, u_0(x) \not\equiv 0$, 且满足

$$\Delta u_0 + F(u_0) \geqslant 0, \not\equiv 0. \tag{5.37}$$

进一步, 假设存在 $\varphi \in C^1([0,\infty)) \cap C^3((0,\infty))$, 满足

(1) $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, $\varphi(u) \geqslant 0, u_0(x) \not\equiv 0$, $\varphi''(u) \geqslant 0$, $\varphi'''(u) \geqslant 0$, 且 $\varphi'(u) > 0$ 对 $u > 0$ 成立;

(2) $\varphi'(u)F'(u) - \varphi''(u)F(u) \geqslant 0$, $\forall\, u \geqslant 0$;

(3) 存在 $\theta > 0$, 使得 $\varphi(u)\varphi''(u) \geqslant \dfrac{\theta+1}{2}(\varphi'(u))^2$, $\forall\, u \geqslant 0$.

如果

$$u \in C^1((0,\tau_0), H^2(\Omega)) \cap C([0,\tau_0), C_0(\Omega))$$

是问题 (5.4) 的解, 那么 $\tau_0 < \infty$ 并且 $\lim\limits_{t\to\tau_0} \|u(\cdot,t)\|_\infty = \infty$.

证明 首先, 由 (5.37) 式和最大值原理知, u 关于 t 严格单增, 并且对于任意固定的 $t > 0$, 有 $u_t(t,x) \geqslant 0, \not\equiv 0$. 因此, $u(t,x) \geqslant 0$ 在 $[0,\tau_0) \times \bar\Omega$ 上成立, 且 $u(t,x) > 0$ 在 $(0,\tau_0) \times \Omega$ 内成立. 记 $I(t) = \displaystyle\int_\Omega \varphi(u(t,x))\mathrm{d}x$, 则

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_\Omega \varphi(u(t,x))\mathrm{d}x > 0, \qquad \forall\, t \geqslant 0, \\ I'(t) &= \int_\Omega \varphi'(u(t,x))u_t(t,x)\mathrm{d}x > 0, \qquad \forall\, t > 0. \end{aligned}$$

不妨假设 $I'(0) > 0$.

因为当 $x \in \partial\Omega$ 时 $u(t,x)=0$, 所以直接计算知

$$\begin{aligned}
I'(t) &= \int_\Omega \varphi'(u)u_t\mathrm{d}x = \int_\Omega \varphi'(u)(\Delta u + F(u))\mathrm{d}x \\
&= -\int_\Omega \varphi''(u)|\nabla u|^2\mathrm{d}x + \int_\Omega \varphi'(u)F(u)\mathrm{d}x, \\
&= 2\int_\Omega \varphi'(u)u_t\mathrm{d}x + \int_\Omega \varphi''(u)|\nabla u|^2\mathrm{d}x - \int_\Omega \varphi'(u)F(u)\mathrm{d}x, \\
I''(t) &= 2\int_\Omega \varphi''(u)u_t^2\mathrm{d}x + \int_\Omega [\varphi'(u)F'(u) - \varphi''(u)F(u)]u_t\mathrm{d}x + \int_\Omega \varphi'''(u)|\nabla u|^2 u_t\mathrm{d}x \\
&\geqslant 2\int_\Omega \varphi''(u)u_t^2\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

设 θ 由条件 (3) 给出，并定义 $J(t)=I^{-\theta}(t)$. 那么

$$\begin{aligned}
J(0) &= I^{-\theta}(0) > 0, \\
J'(0) &= -\theta I^{-(\theta+1)}(0)I'(0) < 0, \\
J''(t) &= \theta I^{-(\theta+2)}(t)[(\theta+1)(I'(t))^2 - I(t)I''(t)].
\end{aligned}$$

由 Schwarz 不等式及条件 (3) 知

$$\begin{aligned}
I(t)I''(t) &\geqslant \int_\Omega \varphi(u)\mathrm{d}x \int_\Omega 2\varphi''(u)u_t^2\mathrm{d}x \\
&\geqslant \left(\int_\Omega \sqrt{2\varphi(u)\varphi''(u)}\,u_t\mathrm{d}x\right)^2 \\
&\geqslant (\theta+1)(I'(t))^2.
\end{aligned}$$

从而， $J''(t) \leqslant 0$. 利用引理 5.2.21 便知，存在 $T_0 : 0 < T_0 < -J(0)/J'(0) = I(0)/(\theta I'(0))$, 使得 $J(T_0)=0$, 即 $\lim\limits_{t\to T_0^-}\int_\Omega \varphi(u(t,x))\mathrm{d}x = \infty$. 故 $\lim\limits_{t\to T_0^-}\|u(\cdot,t)\|_\infty = \infty$. 由此又知， $\tau_0 = T_0$.

习 题 五

5.1 取 $F(u)=|u|^{p-1}u$, $p>1$. 分别用特征函数方法、能量方法和凸性方法研究解的有限时刻爆破，并比较这三种方法的优缺点.

5.2 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是有界光滑区域， $p>q>1$, $b>0$. 考察下面的初边值问题

$$\begin{cases}
u_t - \Delta u = u^p - bu^q, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\
u = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\
u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0, & x \in \Omega,
\end{cases}$$

其中 $u_0 \in C^1(\bar{\Omega})$. 试讨论

(1) 整体解的存在性;

(2) 整体解的不存在性 (分别用特征函数方法、能量方法和凸性方法).

5.3 在定理 5.2.15 的证明中, 给出

$$\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}\|u(t)\| \leqslant \mathrm{e}^{-\mu t}\|u_0\| + C\|u_0\|_2 + \frac{1}{2}\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\{\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)s}\|u(s)\|\}, \quad \forall\, t \in [0, T]$$

的证明细节.

5.4 设 Ω 同于习题 5.2, $p,\ q \geqslant 1$ 且 $pq > 1$. 考察抛物型方程组的初边值问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = v^p - u, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ v_t - \Delta v = u^q - v, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u(x,0) \geqslant 0, \quad v(x,0) \geqslant 0, & x \in \Omega. \end{cases}$$

通过选取合适的工作空间 X, 讨论整体解的存在性和不存在性.

5.5 设 Ω 同于习题 5.2, p, q 和 m 满足 $1 < q \leqslant 2p/(p+1)$, $m \geqslant 2q$ 及 $m > Nq$. 又设 $u_0 \in W_0^{3,m}(\Omega)$, $u_0 \geqslant 0, \neq 0$. 考察初边值问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = u^p - |\nabla u|^q, & x \in \Omega, \qquad t > 0, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \qquad t > 0, \\ u(x,\,0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

(1) 利用半群方法证明上述问题有唯一局部解

$$u \in C^1([0,T),\, W_0^{1,m}(\Omega)) \cap C([0,T),\, W^{2,m/q}(\Omega)),$$

并且满足 $u \geqslant 0$.

(2) 进一步假设 u_0 满足

(a) 在 $\partial\Omega$ 上 $\Delta u_0 + u_0^p - |\nabla u_0|^q = 0$, 在 Ω 内 $\Delta u_0 + u_0^p - |\nabla u_0|^q \geqslant 0$,

(b) $E(u_0) = \dfrac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2 - \dfrac{1}{p+1}\|u_0\|_{p+1}^{p+1} \leqslant 0$,

(c) 当 $q < \dfrac{2p}{p+1}$ 时 $\|u_0\|_{p+1} \gg 1$, 而当 $q = \dfrac{2p}{p+1}$ 时 $p \gg 1$.

试证明, 第一步中得到的局部解以 $L^\infty(\Omega)$ 范数在有限时刻爆破. (提示: 第一步证明 $u_t \geqslant 0$; 第二步证明 $E(u(t))$ 关于 t 非增; 第三步证明 $|\langle u(t),\, |\nabla u(t)|^q\rangle| \leqslant [2/(p+1)]^{q/2}C(p,q)\|u(t)\|_{p+1}^{p+1-\alpha}$, 其中 $\alpha = p - \dfrac{1}{2}q(p+1) \geqslant 0$, 且当 $q = \dfrac{2p}{p+1}$ 时, $C(p,q) = 1$; 第四步计算 $F'(t) = \|u(t)\|_2^2$).

5.6 设 Ω 同于习题 5.2, $0 < T < \infty$, $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap C_0(\Omega)$. 又设 u 是问题

$$u \in C([0,T],X) \cap C((0,T], H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap C^1((0,T], L^2(\Omega)),$$
$$\begin{cases} u_t - \Delta u = F(u), & \forall t \in (0,T], \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

的解. 试证明估计式

$$\|\nabla u(t)\|_2 \leqslant C(1 + t^{1/2}), \qquad \|\Delta u(t)\|_2 \leqslant C(t^{-1/2} + t),$$

其中常数 C 仅依赖于 F, $\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(t)\|_\infty$, $|\Omega|$ 和 $\|u_0\|_{H^1}$.

5.7 把定理 5.2.17 的证明补充完整.

5.8 设 k 和 α 都是正常数, 函数 $\phi(x) = kx^{1+\alpha} - x$, $x > 0$. 记 $\theta = \min \phi$. 试证明:

(1) $\theta < 0$;

(2) 对每一个 $a \in (0, -\theta)$, 存在 $0 < x_1(a) < x_2(a)$, 使得

$$\phi(x) + a < 0, \qquad \forall\, x_1(a) < x < x_2(a),$$
$$a < x_1(a) < a\Big(1 + \frac{1}{\alpha}\Big) < x_2(a), \qquad \phi(x_1(a)) + a = \phi(x_2(a)) = 0.$$

5.9 设 $u_0 \in C_b(\mathbb{R})$. 令

$$v(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\Big\{ - \frac{(x-y)^2}{4t} - \frac{1}{2}\int_0^y u_0(r)\mathrm{d}r \Big\} \mathrm{d}y.$$

试证明: $u = -2\dfrac{v_x}{v}$ 是 Burger 方程初值问题

$$\begin{cases} u_t + uu_x = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

的解. 这就是著名的 Hopf-Cole 代换.

5.10 证明引理 5.2.21.

第六章　波动方程

本章假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是开集，边界 $\partial\Omega$ 光滑．函数 $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, λ 由 (2.16) 式给出 (当 Ω 是有界区域时， λ 是 $-\Delta$ 带有齐次 Dirichlet 边界条件的第一特征值)，常数 $m > -\lambda$. 给定 $(u_0, \bar{u}_0) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. 本章的目的是寻找 $T > 0$ 以及下述问题的解 u：

$$u \in C([0,T], H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T], L^2(\Omega)) \cap C^2([0,T], H^{-1}(\Omega)), \tag{6.1}$$

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + mu = g(u), \qquad t \in (0,T], \\ u(0) = u_0, \ \ u_t(0) = \bar{u}_0. \end{cases} \tag{6.2}$$

§6.1　齐次问题

本节讨论问题 (6.1)–(6.2) 所对应的齐次问题，即 $g(u) \equiv 0$ 时解的情况.

记

$$X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \qquad Y = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega).$$

同于 2.5.4 节和 2.5.5 节，分别在 X 和 Y 上定义线性算子 A 和 B:

$$\begin{cases} D(A) = \{(u,v) \in X : \ \Delta u \in L^2(\Omega), \, v \in H_0^1(\Omega)\}, \\ A(u,v) = (-v, \, -\Delta u + mu), \qquad \forall \ (u,v) \in D(A), \end{cases}$$

$$\begin{cases} D(B) = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \\ B(u,v) = (-v, \, -\Delta u + mu) \in Y, \qquad \forall \ (u,v) \in D(B). \end{cases}$$

那么 A 和 B 都是斜共轭算子 (见定理 2.5.12 和定理 2.5.13). 特别地， A, $-A$, B 和 $-B$ 都是稠定的 m- 增生算子．用 $\{Q(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 表示由 $-A$ 在 X 中生成的等距群，用 $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 表示由 $-B$ 在 Y 中生成的等距群 (参见定理 3.2.10) .

定理 6.1.1　设 $(u_0, \bar{u}_0) \in X$, 用 $u(t)$ 表示 $Q(t)(u_0, \bar{u}_0)$ 的第一个分量．那么，u 是下述问题的唯一解:

$$u \in C(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}, L^2(\Omega)) \cap C^2(\mathbb{R}, H^{-1}(\Omega)), \tag{6.3}$$

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + mu = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0, \quad u_t(0) = \bar{u}_0. \end{cases} \tag{6.4}$$

进一步还有

$$\int_\Omega \{|\nabla u(t)|^2 + mu^2(t) + u_t^2(t)\}\mathrm{d}x = \int_\Omega \{|\nabla u_0|^2 + mu_0^2 + \bar{u}_0^2\}\mathrm{d}x, \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{6.5}$$

此外, 若 $(u_0, \bar{u}_0) \in D(A)$, 则 $u \in C^1(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega)) \cap C^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$, 且 $\Delta u \in C(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$.

证明 设 $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, H^{-1}(\Omega))$, 并记 $U = (u, u_t)$. 那么, $U \in C(\mathbb{R}, D(B)) \cap C^1(\mathbb{R}, Y)$ 当且仅当

$$u \in C(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}, L^2(\Omega)) \cap C^2(\mathbb{R}, H^{-1}(\Omega)).$$

于是, 问题 (6.3), (6.4) 分别等价于

$$U \in C(\mathbb{R}, D(B)) \cap C^1(\mathbb{R}, Y), \tag{6.6}$$

$$U'(t) + BU(t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{6.7}$$

因为 $U_0 = (u_0, \bar{u}_0) \in X = D(B)$, 并且 Y 是 Hilbert 空间, 所以由定理 3.2.10 知, $U(t) = S(t)U_0$ 满足 (6.6) 式和 (6.7) 式. 利用定理 2.5.14 知, Y 和 B 分别是 X 和 A 的延拓. 由于 $U_0 = (u_0, \bar{u}_0) \in X$, 因此, $U(t) = S(t)U_0 = Q(t)U_0$. 注意到 (6.5) 式等价于 $\|Q(t)(u_0, \bar{u}_0)\|_X = \|(u_0, \bar{u}_0)\|_X$, 所以由定义 3.2.1 的条件 (1) 知, (6.5) 式成立. 如果 $(u_0, \bar{u}_0) \in D(A)$, 那么由定理 3.2.10 知, $u \in C^1(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega)) \cap C^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$, 且 $\Delta u \in C(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$. 故定理的结论成立.

§6.2 非齐次问题 —— 一个抽象结果

设 X 是 Hilbert 空间, A 是 X 中的斜共轭算子. 记 $\{Q(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是 $-A$ 生成的等距群.

定理 6.2.1 设 $T > 0$, $u_0 \in X$, 且 $f \in C([0,T], X)$. 又设 $u \in C([0,T], X)$ 由下面的积分定义:

$$u(t) = Q(t)u_0 + \int_0^t Q(t-s)f(s)\mathrm{d}s, \qquad t \in [0,T].$$

则 $\|u(t)\|^2 \in C^1([0,T])$, 并且成立

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|^2 = \langle f(t), u(t)\rangle, \qquad \forall\, t \in [0,T].$$

证明 先设 $u_0 \in D(A)$, $f \in C^1([0,T],X)$. 由定理 3.5.7 知

$$u \in C([0,T],D(A)) \cap C^1([0,T],X),$$

并且满足

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \qquad t \in [0,T].$$

又因为 A 是斜共轭算子，所以

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|^2 = \langle u(t),\, u'(t)\rangle = \langle u(t),\, -Au(t) + f(t)\rangle = \langle f(t),\, u(t)\rangle.$$

从而

$$\|u(t)\|^2 = \|u_0\|^2 + 2\int_0^t \langle u(s),\, f(s)\rangle \mathrm{d}s. \tag{6.8}$$

对于一般情形，可用序列 $\{u_{0,n}\} \subset D(A)$ 和 $\{f_n\} \subset C^1([0,T],X)$ 分别逼近 u_0 和 f. 对于 $u_{0,n}$ 和 f_n 以及与之对应的

$$u_n(t) = Q(t)u_{0,n} + \int_0^t Q(t-s)f_n(s)\mathrm{d}s,$$

式 (6.8) 成立. 显然，在 $C([0,T],X)$ 中 $u_n \to u$. 令 $n \to \infty$, 就推出 (6.8) 式对于 u_0 和 f 以及与之对应的 u 也成立. 因为 u 和 f 都是连续函数，所以由 (6.8) 式知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|^2 = 2\langle u(t),\, f(t)\rangle \in C([0,T]).$$

这说明，函数 $\|u(t)\|^2 \in C^1([0,T])$.

§6.3 $H_0^1(\Omega)$ 中的泛函

考察函数 $g \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. 假设存在非负常数 α 和 C, 使得

$$g(0) = 0, \tag{6.9}$$

$$|g(u) - g(v)| \leqslant C(|u|^\alpha + |v|^\alpha)|u - v|, \qquad \forall\, u, v \in \mathbb{R}. \tag{6.10}$$

显然， $|g(u)| \leqslant C|u|^{1+\alpha}$. 于是，对任意 $p \geqslant 1+\alpha$, 通过 $g(u)(x) = g(u(x))$ 就定义了一个从 $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 到 $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 的算子.

定理 6.3.1 设 $1+\alpha \leqslant p \leqslant \infty$, 则 $g: L^p(\Omega) \to L^{p/(1+\alpha)}(\Omega)$ 是局部 Lipschitz 连续的. 确切地说

$$\|g(u) - g(v)\|_{\frac{p}{1+\alpha}} \leqslant C(\|u\|_p^\alpha + \|v\|_p^\alpha)\|u - v\|_p, \qquad \forall\, u, v \in L^p(\Omega). \tag{6.11}$$

证明 利用 (6.9) 式，(6.10) 式和 Hölder 不等式，可推出

$$\begin{aligned}
\|g(u)-g(v)\|_{\frac{p}{1+\alpha}} &= \left(\int_\Omega |g(u)-g(v)|^{\frac{p}{1+\alpha}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1+\alpha}{p}} \\
&\leqslant C\left(\int_\Omega (|u|^\alpha+|v|^\alpha)^{\frac{p}{1+\alpha}}|u-v|^{\frac{p}{1+\alpha}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1+\alpha}{p}} \\
&\leqslant C\left\{\left(\int_\Omega (|u|^\alpha+|v|^\alpha)^{\frac{p}{\alpha}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\left(\int_\Omega |u-v|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}\right\}^{\frac{1+\alpha}{p}} \\
&= C\left(\int_\Omega (|u|^\alpha+|v|^\alpha)^{\frac{p}{\alpha}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{\alpha}{p}}\left(\int_\Omega |u-v|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant C(\|u^\alpha\|_{\frac{p}{\alpha}}+\|v^\alpha\|_{\frac{p}{\alpha}})\|u-v\|_p \quad (\text{Minkovskii 不等式}) \\
&= C(\|u\|_p^\alpha+\|v\|_p^\alpha)\|u-v\|_p.
\end{aligned}$$

证毕.

对上面的 g, 按如下方式定义 $G\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$$G(u)=\int_0^u g(s)\mathrm{d}s. \tag{6.12}$$

显然，G 满足 (6.10) 式 (把那里的 α 换成 $1+\alpha$). 定义泛函：

$$V(u)=-\int_\Omega G(u(x))\mathrm{d}x, \qquad u\in L^{2+\alpha}(\Omega). \tag{6.13}$$

定理 6.3.1 说明，V 在 $L^{2+\alpha}(\Omega)$ 中的有界集上 Lipschitz 连续. 具体来讲，我们有下述定理.

定理 6.3.2 V 是 $L^{2+\alpha}(\Omega)$ 上的 C^1 泛函,其导函数作为从 $L^{2+\alpha}(\Omega)$ 到 $(L^{2+\alpha}(\Omega))'$ $=L^{(2+\alpha)/(1+\alpha)}(\Omega)$ 的映射是连续的，并且由下式给出：

$$V'(u)=-g(u), \qquad \forall\, u\in L^{2+\alpha}(\Omega). \tag{6.14}$$

证明 注意到

$$G(u+v)-G(u)-vg(u)=\int_u^{u+v}(g(s)-g(u))\mathrm{d}s, \qquad \forall\, u,v\in\mathbb{R},$$

于是，由 (6.10) 式得

$$|G(u+v)-G(u)-vg(u)|\leqslant C'(|u|^\alpha+|v|^\alpha)v^2.$$

利用 Hölder 不等式推知，对任意 $u,v\in L^{2+\alpha}(\Omega)$, 有

$$\begin{aligned}
\left|V(u+v)-V(u)+\langle v,\,g(u)\rangle_{L^{2+\alpha},L^{\frac{2+\alpha}{1+\alpha}}}\right| &= \left|V(u+v)-V(u)+\int_\Omega vg(u)\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant C'(\|u\|_{2+\alpha}^\alpha+\|v\|_{2+\alpha}^\alpha)\|v\|_{2+\alpha}^2.
\end{aligned}$$

从而当 $\|v\|_{2+\alpha} \to 0$ 时，有

$$\left|\frac{V(u+v)-V(u)}{\|v\|_{2+\alpha}} + \left\langle \frac{v}{\|v\|_{2+\alpha}},\ g(u)\right\rangle_{L^{2+\alpha},\, L^{\frac{2+\alpha}{1+\alpha}}}\right|$$
$$\leqslant C'(\|u\|_{2+\alpha}^{\alpha} + \|v\|_{2+\alpha)}^{\alpha})\|v\|_{2+\alpha} \longrightarrow 0.$$

这说明，对任意 $u \in L^{2+\alpha}(\Omega)$, 有 $V'(u) = -g(u)$.

现在，引入比条件 (6.10) 式较弱的条件：

$$|g(u)-g(v)| \leqslant C(1+|u|^{\alpha}+|v|^{\alpha})|u-v|, \qquad \forall\, u,v \in \mathbb{R}. \tag{6.15}$$

在这种情形下，作分解

$$g = g_1 + g_2,$$

使得 g_2 满足 (6.10) 式， g_1 满足 $\alpha = 0$ 时的 (6.10) 式．事实上，只要取

$$g_1(u) = \begin{cases} g(u), & \text{如果 } |u| \leqslant 1, \\ g(1), & \text{如果 } u \geqslant 1, \\ g(-1), & \text{如果 } u \leqslant -1 \end{cases}$$

即可．另一方面，当 $p \leqslant 2N/(N-2)$ 时，有

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \tag{6.16}$$

并且 $H_0^1(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中是稠的．从而

$$L^{p'}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega). \tag{6.17}$$

定理 6.3.3 假设对于 $0 \leqslant \alpha \leqslant 4/(N-2)$, g 满足 (6.9) 式和 (6.15) 式，则 $g: H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ 是局部 Lipschitz 连续的．

证明 因为 g_1 满足 $\alpha = 0$ 时的 (6.10) 式，所以由定理 6.3.1 知， $g_1 : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 局部 Lipschitz 连续．因此， $g_1 : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ 是局部 Lipschitz 连续的．另一方面，由定理 6.3.1 知， $g_2 : L^{2+\alpha}(\Omega) \to L^{(2+\alpha)/(1+\alpha)}(\Omega)$ 是局部 Lipschitz 连续的．对于 $p = 2+\alpha$, 由 (6.16) 式和 (6.17) 式推知， $g_2 : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ 局部 Lipschitz 连续．定理得证．

定理 6.3.4 假设对于 $0 \leqslant \alpha \leqslant 2/(N-2)$, g 满足 (6.9) 式和 (6.15) 式，则 $g : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 局部 Lipschitz 连续．

证明 首先, $g_1 : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 局部 Lipschitz 连续. 取 $q = 2(1+\alpha)$, 则由 (6.10) 式以及 Hölder 不等式, 可得

$$\|g_2(u) - g_2(v)\|_2 \leqslant C(\|u\|_q^\alpha + \|v\|_q^\alpha)\|u - v\|_q, \qquad \forall\, u, v \in H_0^1(\Omega).$$

因为 $q \leqslant 2N/(N-2)$, 所以利用 (6.16) 式便得所要的结论.

现在考察由 (6.12) 式定义的函数 G 和由 (6.13) 式定义的泛函 V.

定理 6.3.5 假设对于 $0 \leqslant \alpha \leqslant 4/(N-2)$, g 满足 (6.9) 式和 (6.15) 式, 则 V 是 $H_0^1(\Omega)$ 上的 C^1 泛函. 它的导函数作为从 $H_0^1(\Omega)$ 到 $(H_0^1(\Omega))' = H^{-1}(\Omega)$ 的映射是连续的, 并且由下式给出:

$$V'(u) = -g(u), \qquad \forall\, u \in H_0^1(\Omega). \tag{6.18}$$

证明 记

$$G_i(u) = \int_0^u g_i(s)\mathrm{d}s, \qquad V_i(u) = -\int_\Omega G_i(u(x))\mathrm{d}x, \qquad i = 1, 2.$$

因为 g_1 和 g_2 都满足 (6.9) 式和 (6.10) 式, 所以对于 V_i, 定理 6.3.2 成立. 条件 $2 + \alpha \leqslant 2N/(N-2)$ 说明

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2+\alpha}(\Omega), \qquad L^{(2+\alpha)/(1+\alpha)}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega).$$

从而 (6.18) 式成立, 且 $g : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ 是连续的.

推论 6.3.6 假设对于 $0 \leqslant \alpha \leqslant 2/(N-2)$, g 满足 (6.9) 式和 (6.15) 式. 又设 $T > 0$, $u \in C([0,T], H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T], L^2(\Omega))$. 那么函数 $V(u(t)) \in C^1([0,T])$, 且有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(u(t)) = -\int_\Omega g(u(t))u_t(t)\mathrm{d}x, \qquad \forall\, t \in [0,T]. \tag{6.19}$$

证明 首先假设 $u \in C^1([0,T], H_0^1(\Omega))$. 则由定理 6.3.5 知, 对任意 $t \in [0,T]$, 有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(u(t)) &= -\int_\Omega G'(u(t))u_t(t)\mathrm{d}x = -\langle G'(u(t)),\, u_t(t)\rangle_{H^{-1}, H_0^1} \\ &= -\langle g(u(t)),\, u_t(t)\rangle_{H^{-1}, H_0^1} = -\int_\Omega g(u(t)u_t(t)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由此推出

$$V(u(t)) = V(u(0)) - \int_0^t\int_\Omega g(u(\tau))u_\tau(\tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau, \qquad \forall\, t \in [0,T]. \tag{6.20}$$

对于 $u \in C([0,T], H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T], L^2(\Omega))$ 的情况. 由稠密性知，存在 $u_n \in C^1([0,T], H_0^1(\Omega))$, 使得在 $C([0,T], H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T], L^2(\Omega))$ 中，有

$$u_n \to u.$$

对于 u_n, (6.20) 式成立. 根据 $|g(u)| \leqslant C|u|^{1+\alpha}$ 和 $2(1+\alpha) \leqslant 2N/(N-2)$ (因为 $\alpha \leqslant 2/(N-2)$) 推知， $g(u), g(u_n) \in L^2(\Omega)$. 又 $u_t, (u_n)_t \in L^2(\Omega)$, 所以令 $n \to \infty$ 就推出 u 满足 (6.20) 式. 由于 $g(u)u_\tau \in L^1(\Omega)$ 且关于 τ 连续，因此由 (6.20) 式知，$V(u(t))$ 关于 τ 可微并且 (6.19) 式成立.

§6.4　局部存在性

取 $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $Y = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, 算子 A 和 B 由 6.1 节给出. 函数 $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 且满足 (6.9) 式和 (6.15) 式，其中 $\alpha \leqslant 2/(N-2)$. 函数 G 和泛函 V 分别由 (6.12) 式和 (6.13) 式确定. 按如下方式定义 X 上的泛函 E 和从 X 到 X 的映射 F:

$$\begin{aligned}
E(u,v) &= \frac{1}{2}\|(u,v)\|_X^2 + V(u) \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \{|\nabla u|^2 + mu^2 + v^2 - 2G(u)\}\mathrm{d}x, \\
F(u,v) &= (0,\, g(u)), \qquad \forall\ (u,v) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).
\end{aligned}$$

定理 6.3.4 说明，$g: H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 局部 Lipschitz 连续, 从而 $F: X \to X$ 局部 Lipschitz 连续. 给定 $(u_0, \bar{u}_0) \in X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, 本节的目的是寻找 $T > 0$, 以及问题 (6.1) 和 (6.2) 的解 u. 同于 6.1 节，记 $\{Q(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是 $-A$ 在 X 中生成的等距群， $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是 $-B$ 在 Y 中生成的等距群.

定理 6.4.1　设 $T > 0$, $(u_0, \bar{u}_0) \in X$, $u \in C([0,T], H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T], L^2(\Omega))$. 则 u 是问题 (6.1) 和 (6.2) 的解当且仅当 $U = (u,\, u_t)$ 满足积分方程:

$$U(t) = Q(t)(u_0, \bar{u}_0) + \int_0^t Q(t-s)F(U(s))\mathrm{d}s, \quad t \in [0,T]. \tag{6.21}$$

此外，若 $\Delta u_0 \in L^2(\Omega)$ 且 $\bar{u}_0 \in H_0^1(\Omega)$, 则有

$$u \in C^1([0,T], H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0,T], L^2(\Omega)), \quad \Delta u \in C([0,T], L^2(\Omega)).$$

证明　记 $U = (u,\, u_t)$, 则 (6.2) 式等价于

$$\begin{cases} U_t + BU = F(U), & t \in [0,T], \\ U(0) = (u_0, \bar{u}_0). \end{cases} \tag{6.22}$$

如果 $u \in C([0,T], H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T], L^2(\Omega))$ 是 (6.1) 和 (6.2) 的解，那么 $U \in C([0,T], X)$，并且 $f(\cdot) := F(U(\cdot)) \in L^1([0,T], X)$. 注意到 $S(t)U = Q(t)U$ 对所有 $U \in X$ 成立，因此类似于定理 3.5.1 的证明可推知， (6.21) 式成立.

反之，假设 $U = (u, u_t)$ 是问题 (6.21) 的解. 因为 $U(0) = (u_0, \bar{u}_0) \in X = D(B)$, $Q(t)U(0) = S(t)U(0)$ 且 $Q(t-s)F(U(s)) = S(t-s)F(U(s))$，所以由定理 4.2.7 知，$U \in C([0,T], D(B)) \cap C^1([0,T], Y)$ 且满足 (6.22) 式. 这说明 u 满足问题 (6.1) 和 (6.2) .

进一步，若 $\Delta u_0 \in L^2(\Omega)$ 且 $\bar{u}_0 \in H_0^1(\Omega)$，则 $(u_0, \bar{u}_0) \in D(A)$. 再次利用定理 4.2.7 可推出， $U \in C([0,T], D(A)) \cap C^1([0,T], X)$. 从而， $u \in C^1([0,T], H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0,T], L^2(\Omega))$，并且 $\Delta u \in C([0,T], L^2(\Omega))$.

利用定理 4.2.5, 定理 4.2.8 和定理 6.4.1, 可推出解的局部存在性:

定理 6.4.2 对任意 $(u_0, \bar{u}_0) \in X$，都存在唯一函数 u，其最大存在区间为 $[0, \tau_0)$，并且对任意 $T < \tau_0$，u 是问题 (6.1) 和 (6.2) 的解. 此外，若 $\tau_0 < \infty$，则 $\lim\limits_{t \to \tau_0} (\|u(t)\|_{H^1} + \|u_t(t)\|_2) = \infty$.

最后，我们有下面的能量守恒定理.

定理 6.4.3 设 $(u_0, \bar{u}_0) \in X$，u 是问题 (6.1) 和 (6.2) 的解. 那么

$$E(u(t), u_t(t)) = E(u_0, \bar{u}_0), \qquad \forall\, t \in [0, \tau_0). \tag{6.23}$$

证明 由定理 6.2.1 和推论 6.3.6 得

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E(u(t), u_t(t)) &= \langle F(u(t), u_t(t)), (u(t), u_t(t))\rangle_X - \int_\Omega g(u(t)) u_t(t) \mathrm{d}x \\
&= \langle (0, g(u(t))), (u(t), u_t(t))\rangle_X - \int_\Omega g(u(t)) u_t(t) \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega g(u(t)) u_t(t) \mathrm{d}x - \int_\Omega g(u(t)) u_t(t) \mathrm{d}x \\
&= 0, \qquad \forall\, t \in [0, \tau_0).
\end{aligned}$$

故结论成立.

能量 E 与 X 中的范数有关. 在研究波动方程时，能量守恒式 (6.23) 是非常重要的. 事实上，能量守恒式 (6.23) 给出了解在 X 中的范数估计. 此外，利用能量守恒式 (6.23) ，还可以得到关于解整体存在，或者解在有限时刻爆破的结果.

根据 3.2 节的结论，对 $T < 0$，也可以求解问题 (6.1) 和 (6.2) . 事实上，u 是方程 (6.2) 在 $[T, 0]$ 上以 $u(0) = u_0$ 和 $u_t(0) = \bar{u}_0$ 为初值的解，当且仅当 $v(t) = u(-t)$ 是方程 (6.2) 在 $[0, -T]$ 上以 $v(0) = u_0$ 和 $v_t(0) = -\bar{u}_0$ 为初值的解.

§6.5 整体存在性

同于热方程 (第五章)，我们将给出关于 g 的两类条件. 第一类条件保证所有解都整体存在，第二类条件保证小初值时解整体存在. 本节总假定函数 $g\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$，且满足 (6.9) 式和 (6.15) 式，其中 $\alpha\leqslant 2/(N-2)$.

定理 6.5.1 假设存在正常数 C, 使得 $G(u)\leqslant Cu^2$ 对所有 $u\in\mathbb{R}$ 成立. 则对任意 $(u_0,\bar{u}_0)\in X$, 有 $\tau_0=\infty$.

证明 记 $f(t)=\|(u(t),\,u_t(t))\|_X^2$, 其中 $t\in[0,\tau_0)$. 由 (6.23) 式得

$$\begin{aligned}f(t)&=f(0)-2\int_\Omega G(u_0)\mathrm{d}x+2\int_\Omega G(u(t))\mathrm{d}x\\&\leqslant f(0)-2\int_\Omega G(u_0)\mathrm{d}x+2C\int_\Omega u^2(t)\mathrm{d}x,\qquad\forall\,t\in[0,\tau_0).\end{aligned}\tag{6.24}$$

另一方面，因为

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_2^2&=\|u_0\|_2^2+\int_0^t\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_\Omega|u(s)|^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s\\&=\|u_0\|_2^2+2\int_0^t\int_\Omega u(s)u_s(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\&\leqslant\|u_0\|_2^2+C\int_0^t f(s)\mathrm{d}s,\qquad\forall\,t\in[0,\tau_0).\end{aligned}\tag{6.25}$$

所以由 (6.24) 式，(6.25) 式和 Gronwall 引理知，结论成立.

定理 6.5.2 假设存在正常数 β 和 $\mu<\lambda+m$, 使得当 $|u|\leqslant\beta$ 时，$2|G(u)|\leqslant\mu u^2$ 成立. 则存在正常数 δ 和 K, 使得当 $\|(u_0,\bar{u}_0)\|_X<\delta$ 时，$\tau_0=\infty$, 并且

$$\sup_{t\geqslant 0}\|(u(t),\,u_t(t))\|_X\leqslant K\|(u_0,\bar{u}_0)\|_X.\tag{6.26}$$

证明 因为 g 满足 (6.15) 式, 所以存在正常数 C 和 $k>2$, 使得 $(N-2)k\leqslant 2N$, 并且当 $|u|\gg 1$ 时，有

$$2|G(u)|\leqslant C|u|^k.$$

根据 G 的假设条件，存在一个较大的正常数 C, 使得

$$2|G(u)|\leqslant\mu u^2+C|u|^k,\qquad\forall\,u\in\mathbb{R}.$$

从而，由 $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^k(\Omega)$ 知

$$2\int_\Omega|G(u)|\mathrm{d}x\leqslant\mu\int_\Omega u^2\mathrm{d}x+C\|u\|_{H^1}^k,\qquad\forall\,u\in H_0^1(\Omega).$$

由于 $\lambda+m>0$, 因此可以用 $\left(\int_\Omega(|\nabla u|^2+mu^2)\mathrm{d}x\right)^{1/2}$ 作为 u 在 H_0^1 中的范数 $\|u\|_{H_0^1}$. 因为 $\lambda+m>\mu$, 所以存在 $\nu\in(0,1)$, 使得 $\lambda+m>\mu/(1-\nu)$. 于是

$$\|u\|_{H_0^1}^2=\int_\Omega(|\nabla u|^2+mu^2)\mathrm{d}x\geqslant(\lambda+m)\int_\Omega u^2\mathrm{d}x>\frac{\mu}{1-\nu}\int_\Omega u^2\mathrm{d}x,$$

即

$$\mu\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\leqslant(1-\nu)\|u\|_{H^1}^2,\quad\forall\, u\in H_0^1(\Omega).$$

因此

$$2\int_\Omega|G(u)|\mathrm{d}x\leqslant(1-\nu)\|u\|_{H^1}^2+C\|u\|_{H^1}^k,\qquad\forall\, u\in H_0^1(\Omega).\tag{6.27}$$

设 $(u_0,\bar{u}_0)\in X$ 满足 $\|(u_0,\bar{u}_0)\|_X\leqslant 1$. 记 u 是问题 (6.1) 和 (6.2) 对应于初值 $(u_0,\bar{u}_0)$ 的解. 同于定理 6.5.1 的证明, 令 $f(t)=\|(u(t),u_t(t))\|_X^2$. 注意到 $f(t)\geqslant\|u(t)\|_{H^1}^2$, 所以由 (6.24) 式和 (6.27) 式得

$$\nu f(t)\leqslant f(0)-2\int_\Omega G(u_0)\mathrm{d}x+Cf^{k/2}(t),\qquad\forall\, t\in[0,\tau_0).\tag{6.28}$$

因为

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega G(u_0)\mathrm{d}x\right|&\leqslant\int_\Omega|G(u_0)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{\mu}{2}\int_\Omega u_0^2\mathrm{d}x+\frac{C}{2}\|u_0\|_{H^1}^k\\&\leqslant C[\|(u_0,\bar{u}_0)\|_X^2+\|(u_0,\bar{u}_0)\|_X^k]\\&\leqslant C[f(0)+f^{k/2}(0)],\end{aligned}$$

所以由 $f(0)\leqslant 1$ 推知, 存在 $M\geqslant 1$, 使得

$$f(0)-2\int_\Omega G(u_0)\mathrm{d}x\leqslant M\nu f(0).\tag{6.29}$$

取 $\varepsilon=\dfrac{k}{2}-1>0$, $\phi(\xi)=\dfrac{C}{\nu}\xi^{1+\varepsilon}-\xi$, 其中 $\xi\geqslant 0$. 令 $-\theta=\min_{\xi\geqslant0}\phi(\xi)<0$. 类似于定理 5.2.16 的证明可推出, 对任意 $a\in(0,\theta)$, 存在 $0<\xi_1(a)<\xi_2(a)$, 使得

$$\phi(\xi)+a<0,\qquad\forall\xi_1(a)<\xi<\xi_2(a),\tag{6.30}$$

$$a<\xi_1(a)<a\Big(1+\frac{1}{\varepsilon}\Big)<\xi_2(a),\qquad\phi(\xi_1(a))+a=\phi(\xi_2(a))+a=0.\tag{6.31}$$

由 (6.28) 式和 (6.29) 式知, $\nu f(t)\leqslant M\nu f(0)+Cf^{k/2}(t)$, 即

$$\phi(f(t))+Mf(0)\geqslant 0,\qquad\forall\, t\in[0,\tau_0).\tag{6.32}$$

此外，若进一步假设 $Mf(0) < \theta$, 则由 (6.30) 式和 (6.32) 式得

$$f(t) \in [0, \xi_1(Mf(0))] \cup [\xi_2(Mf(0)), \infty).$$

于是，利用 $f(0) \leqslant Mf(0) < \theta$ 和 (6.31) 式推出， $f(0) \leqslant Mf(0) < \xi_1(Mf(0))$. 再由 $f(t)$ 的连续性知

$$f(t) \leqslant \xi_1(Mf(0)) \leqslant \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} Mf(0), \qquad \forall\, t \in [0, \tau_0). \tag{6.33}$$

取

$$K = \sqrt{M(1+\varepsilon)/\varepsilon}, \qquad \delta = \min\{1, \sqrt{\theta/M}\}.$$

则当 $\|(u_0, \bar{u}_0)\|_X < \delta$ 时，有 $f(0) < \delta^2$. 从而 $Mf(0) < \theta$ 且 $f(0) < 1$. 故 (6.33) 式成立. 由 (6.33) 式看出， $\tau_0 = \infty$ 并且 (6.26) 式成立. 证毕.

§6.6 有限时刻爆破

同于 5.2.4 节，本节将介绍两种方法，用于研究问题 (6.2) 的解在有限时刻爆破.

1. 特征函数方法 设区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 有界，边界 $\partial\Omega$ 光滑. 记 λ 是 $-\Delta$ 带有齐次 Dirichlet 边界条件的第一特征值， φ 是对应的特征函数. 对 φ 进行标准化，即令 $\displaystyle\int_\Omega \varphi \mathrm{d}x = 1$. 则 $\lambda > 0$, $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, 且在 Ω 内， $\varphi > 0$. 考察问题 (6.2) 的一个特殊情况： $m = 0$, $g(u) = |u|^p$, $p > 1$, 即

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = |u|^p, & x \in \Omega,\ \ t > 0, \\ u(t,x) = 0, & x \in \partial\Omega,\ \ t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x),\ u_t(0,x) = \bar{u}_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{6.34}$$

定理 6.6.1 设 $u_0, \bar{u}_0 \geqslant 0, \neq 0$. 假定 u 是问题 (6.34) 的 C^2 解，其最大存在时间为 τ_0. 若 $\displaystyle\int_\Omega \varphi(x) u_0(x) \mathrm{d}x > \lambda^{1/(p-1)}$, 则 $\tau_0 < \infty$, 并且

$$\lim_{t \to \tau_0} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(t,x)| = \infty,$$

即解 u 在有限时刻爆破.

证明 记

$$\psi(t) = \int_\Omega \varphi(x) u(t,x) \mathrm{d}x, \qquad t \geqslant 0,$$

则 $\psi(0) > 0$, $\psi'(0) > 0$. 用 φ 乘以 (6.34) 式中的方程，并在 Ω 上积分得

$$\begin{aligned}\psi''(t) &= \int_\Omega \varphi u_{tt}\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \varphi\Delta u\mathrm{d}x + \int_\Omega \varphi|u|^p\mathrm{d}x \\ &= -\lambda\int_\Omega \varphi u\mathrm{d}x + \int_\Omega \varphi|u|^p\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

利用 Jensen 不等式知

$$\int_\Omega \varphi|u|^p\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_\Omega \varphi|u|\mathrm{d}x\right)^p \geqslant \psi^p(t).$$

于是

$$\begin{cases}\psi''(t) \geqslant -\lambda\psi(t) + \psi^p(t) = \psi(t)[\psi^{p-1}(t) - \lambda], & t > 0, \\ \psi(0) > 0, \quad \psi'(0) > 0.\end{cases}$$

因为 $\psi^{p-1}(0) > \lambda$ 且 $\psi'(0) > 0$, 所以对 $t \geqslant 0$ 有 $\psi'(t) > 0$. 从而 $\psi(t)$ 在有限时刻爆破，即 $\tau_0 < \infty$ 且 $\lim\limits_{t\to\tau_0}\psi(t) = \infty$. 因此

$$\lim_{t\to\tau_0}\sup_{x\in\bar\Omega}|u(t,x)| = \infty.$$

特征函数方法对于波动方程的应用是非常有限的. 这里给出的例子是一个极为特殊的情形. 事实上，问题 (6.34) 没有具体的物理背景. 请读者考虑，如果将非线性函数 $|u|^p$ 替换成 $|u|^{p-1}u$, 那么以上证明是否成立？

2. 能量方法 这一部分总假定 u 是问题 (6.2) 的解.

定理 6.6.2 假设存在 $\varepsilon > 0$, 使得

$$ug(u) \geqslant (2+\varepsilon)G(u), \qquad \forall\ u \in \mathbb{R}.$$

如果 $(u_0, \bar{u}_0) \in X$ 且 $E(u_0, \bar{u}_0) < 0$, 那么 $\tau_0 < \infty$.

上述定理的证明需要借助于下面的引理.

引理 6.6.3 设 $T > 0$, $u \in C([0,T], H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T], L^2(\Omega)) \cap C^2([0,T], H^{-1}(\Omega))$, 则 $\int_\Omega u^2(t)\mathrm{d}x \in C^2([0,T])$, 并且成立

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\int_\Omega u^2(t)\mathrm{d}x = 2\int_\Omega u_t^2(t)\mathrm{d}x + 2\langle u(t), u_{tt}(t)\rangle_{H_0^1, H^{-1}}, \qquad \forall\ t \in [0,T].$$

证明 记 $f(t)=\int_\Omega u^2(t)\mathrm{d}x,\ t\in[0,T]$. 首先假设 $u\in C^2([0,T],\,H_0^1(\Omega))$, 则有

$$\begin{aligned}f''(t)&=2\int_\Omega u_t^2(t)\mathrm{d}x+2\int_\Omega u(t)u_{tt}(t)\mathrm{d}x\\&=2\int_\Omega u_t^2(t)\mathrm{d}x+2\langle u(t),\,u_{tt}(t)\rangle_{H_0^1,\,H^{-1}},\qquad \forall\, t\in[0,T].\end{aligned}$$

由此推出

$$f'(t)=f'(0)+2\int_0^t\left(\int_\Omega u_s^2(s)\mathrm{d}x+\langle u(s),u_{ss}(s)\rangle_{H_0^1,\,H^{-1}}\right)\mathrm{d}s,\qquad t\in[0,T].\quad(6.35)$$

根据稠密性，可以证明 (6.35) 式对于

$$u\in C([0,T],H_0^1(\Omega))\cap C^1([0,T],L^2(\Omega))\cap C^2([0,T],\,H^{-1}(\Omega))$$

也成立. 对 (6.35) 式两端关于 t 求导，即得结论.

引理 6.6.4 设 $T>0,\ u\in C([0,T],H_0^1(\Omega))\cap C^1([0,T],L^2(\Omega))\cap C^2([0,T],$ $H^{-1}(\Omega))$ 是问题 (6.2) 的解. 记 $f(t)=\int_\Omega u^2(t)\mathrm{d}x,\ t\in[0,T]$, 则

$$f''(t)=2\int_\Omega\{u_t^2(t)-|\nabla u(t)|^2-mu^2(t)+u(t)g(u(t))\}\mathrm{d}x,\qquad \forall t\in[0,T].$$

证明 由引理 6.6.3 和 (6.2) 式知

$$f''(t)=2\int_\Omega u_t^2(t)\mathrm{d}x+2\langle u(t),\,\Delta u(t)-mu(t)+g(u(t))\rangle_{H_0^1,\,H^{-1}},\qquad \forall\, t\in[0,T].$$

接下来只需证明，对任意 $w\in H_0^1(\Omega)$, 成立

$$\langle w,\,\Delta w\rangle_{H_0^1,\,H^{-1}}=-\int_\Omega|\nabla w|^2\mathrm{d}x.\qquad(6.36)$$

如果 $\Delta w\in L^2(\Omega)$, 那么由引理 2.5.3 知，(6.36) 式成立. 再利用稠密性知，(6.36) 式对 $w\in H_0^1(\Omega)$ 仍然成立.

定理 6.6.2 的证明 设 $(u_0,\bar u_0)\in X$ 满足 $E(u_0,\bar u_0)<0$, 并令

$$f(t)=\int_\Omega u^2(t)\mathrm{d}x,\qquad t\in[0,\tau_0).$$

由引理 6.6.4 和假设条件知

$$\begin{aligned}f''(t)&=2\int_\Omega\{u_t^2(t)-|\nabla u(t)|^2-mu^2(t)+u(t)g(u(t))\}\mathrm{d}x\\&\geqslant 2\int_\Omega\{u_t^2(t)-|\nabla u(t)|^2-mu^2(t)+(2+\varepsilon)G(u(t))\}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

从而由能量守恒式 (6.23) 知，对任意 $t \in [0, \tau_0)$, 有

$$f''(t) \geqslant \varepsilon \int_\Omega \{|\nabla u(t)|^2 + mu^2(t)\}\mathrm{d}x + (4+\varepsilon)\int_\Omega u_t^2(t)\mathrm{d}x \\ -2(2+\varepsilon)E(u_0, \bar{u}_0). \tag{6.37}$$

下面采用反证法. 假设 $\tau_0 = \infty$. 则由 (6.37) 式知

$$f''(t) \geqslant -2(2+\varepsilon)E(u_0, \bar{u}_0) > 0, \qquad \forall\, t \geqslant 0.$$

因而, $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \infty$. 另一方面，利用 (6.37) 式和 Cauchy–Schwarz 不等式，可得

$$\begin{aligned} f(t)f''(t) &\geqslant (4+\varepsilon)\int_\Omega u^2(t)\mathrm{d}x \int_\Omega u_t^2(t)\mathrm{d}x \\ &\geqslant (4+\varepsilon)\left(\int_\Omega u(t)u_t(t)\mathrm{d}x\right)^2 \\ &= \left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)(f'(t))^2. \end{aligned}$$

于是

$$(f^{-\varepsilon/4}(t))'' \leqslant 0, \qquad \forall\, t \geqslant 0.$$

同于定理 5.2.20 的证明 (主要是 (5.36) 式以下的部分)，可导出矛盾.

定理 6.6.5 设 Ω 有界，且存在正常数 K 和 ε, 使得

$$ug(u) \geqslant (2+\varepsilon)G(u), \qquad \forall\, |u| \geqslant K.$$

记 $\mu = \min\limits_{|u|\leqslant K} ug(u)$, $\nu = \max\limits_{|u|\leqslant K} G(u)$. 若 $(u_0, \bar{u}_0) \in X$ 满足

$$(2+\varepsilon)E(u_0, \bar{u}_0) < -|\Omega| \times |\mu - (2+\varepsilon)\nu|,$$

则有 $\tau_0 < \infty$.

证明 注意到对 $t \in [0, \tau_0)$, 有

$$\begin{aligned} &\int_\Omega u(t)g(u(t))\mathrm{d}x \\ =& \int_{|u|\leqslant K} u(t)g(u(t))\mathrm{d}x + \int_{|u|>K} u(t)g(u(t))\mathrm{d}x \\ \geqslant& \int_{|u|\leqslant K} u(t)g(u(t))\mathrm{d}x + (2+\varepsilon)\int_{|u|>K} G(u(t))\mathrm{d}x \\ =& \int_{|u|\leqslant K} \{u(t)g(u(t)) - (2+\varepsilon)G(u(t))\}\mathrm{d}x + (2+\varepsilon)\int_\Omega G(u(t))\mathrm{d}x \\ \geqslant& -|\Omega| \times |\mu - (2+\varepsilon)\nu| + (2+\varepsilon)\int_\Omega G(u(t))\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

同于定理 6.6.2 的证明，可得结论.

对于问题 (6.2)，当 $m=0,\ g(u)=|u|^{p-1}u$ 时，还可以得到一个比定理 6.6.2 更好的结果. 此时的能量

$$E(u,v)=\frac{1}{2}\int_\Omega(|\nabla u|^2+v^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{p+1}\int_\Omega|u|^{p+1}\mathrm{d}x.$$

定理 6.6.6 假定 p 满足：当 $N=1,2$ 时，$p>1$; 当 $N\geqslant 3$ 时，$1<p\leqslant N/(N-2)$. 设 $(u_0,\bar{u}_0)\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, 并且

$$u\in C([0,\tau_0),\ H_0^1(\Omega))\cap C^1([0,\tau_0),L^2(\Omega))$$

是问题 (6.2) 的唯一极大定义解. 若 $E_0:=E(u_0,\bar{u}_0)<0$, 或者 $E_0=0$ 且 $\langle u_0,\bar{u}_0\rangle>0$, 则 $\tau_0<\infty$, 且有

$$\lim_{t\to\tau_0}\|u(t)\|_{p+1}=\lim_{t\to\tau_0}\{\|\nabla u(t)\|_2^2+\|u_t(t)\|_2^2\}=\infty. \tag{6.38}$$

证明 记 $f(t)=\|u(t)\|_2^2$, 则 $f'(t)=2\langle u,u_t\rangle$, 且

$$f''(t)=2\int_\Omega(u_t^2-|\nabla u|^2+|u|^{p+1})\mathrm{d}x.$$

所以由能量守恒式 (6.23) 得

$$f''(t)\geqslant\frac{2(p-1)}{p+1}\int_\Omega|u|^{p+1}\mathrm{d}x-4E_0\geqslant kf^{(p+1)/2}(t)-4E_0, \tag{6.39}$$

其中常数 $k>0$. 采用反证法. 假设 $\tau_0=\infty$. 如果 $E_0<0$, 那么由 (6.39) 式知，当 t 很大时，$f'(t)>0$, 即 $\langle u,u_t\rangle>0$. 因此，我们不妨认为 $E_0=0$ 且 $\langle u_0,\bar{u}_0\rangle>0$. 因为 $f''(t)\geqslant 0$, 所以 $f'(t)$ 和 $f(t)$ 都是非减非负函数. 于是由 (6.39) 式知

$$(f'(t))^2\geqslant\frac{4k}{p+3}f^{(p+3)/2}(t)+C,$$

其中常数 $C\geqslant 0$. 故

$$\int_{f(0)}^{f(t)}\frac{\mathrm{d}f}{\{C+[4k/(p+3)]f^{(p+3)/2}\}^{1/2}}\geqslant t,\qquad\forall\, t\in[0,\infty).$$

然而，由 $f(0)>0$ 知，上式左端的积分有界. 矛盾.

习 题 六

6.1 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是有界光滑区域, $p>1$. 考察初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u+uu_t=|u|^{p-1}u, & x\in\Omega, \quad t>0,\\ u=0, & x\in\partial\Omega, \quad t>0,\\ u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=\tilde{u}_0(x), & x\in\Omega. \end{cases}$$

通过选取适当的工作空间 X, 讨论解整体存在以及在有限时刻爆破的条件.

6.2 取 $g(u)=a|u|^\alpha u$, 其中 $a\neq 0$, $\alpha>0$ 且 $\alpha\leqslant 2/(N-2)$. 设 $(u_0,\bar{u}_0)\in X$, 用 u 表示问题 (6.1) 和 (6.2) 的解. 分别就 $a<0$ 和 $a>0$ 的情况, 讨论解的整体存在性、有界性以及非整体存在性.

6.3 取 $g(u)=a|u|^\alpha u-b|u|^\beta u$, 其中 a, b, α, $\beta>0$. 设 $(u_0,\bar{u}_0)\in X$, 记 u 是问题 (6.1) 和 (6.2) 的解. 对 α, β 作适当的假设, 讨论解的整体存在性、有界性以及非整体存在性.

第七章　拟线性抛物型方程

本章将减弱对非线性项的限制条件，推广第五章的结果．拟线性抛物型方程的确切定义将在 7.4 节中给出．一个典型例子就是

$$u_t = \Delta u + f(u,\, \nabla u).$$

方程中的主项是 Laplace 算子，它是一个最简单的二阶椭圆算子．因为非线性函数与未知函数 u 的梯度有关，所以必须设法用 Laplace 项来控制非线性项．这就促使我们研究它的分数幂问题．与分数幂方法等价的一条途经，就是在 Laplace 的定义域和基本工作空间之间的一个内插空间中定义非线性项．

§7.1　分数幂算子和分数幂空间

在定义分数幂算子之前，首先考察一个实例．众所周知，对 $\alpha < 0$, 有

$$\Gamma(-\alpha) = \int_0^\infty s^{-\alpha-1}\mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s = a^{-\alpha}\int_0^\infty t^{-\alpha-1}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t,$$

其中常数 $a > 0$. 由此推出

$$a^\alpha = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^\infty t^{-\alpha-1}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t.$$

受此启发，我们引入下面的定义．

定义 7.1.1　设 $-A$ 是 Banach 空间 X 中的 C_0 半群 $Q(t)$ 的无穷小生成元，$Q(t)$ 满足

$$\|Q(t)\| \leqslant M\mathrm{e}^{-at}, \qquad \forall\, t \geqslant 0,$$

其中常数 $a, M > 0$. 用 $\mathcal{B}(X)$ 表示所有具有上述性质的算子 A 的全体．对于 $A \in \mathcal{B}(X)$ 和 $\alpha < 0$, 定义算子 $A^\alpha \in \mathcal{L}(X)$：

$$A^\alpha x = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^\infty t^{-\alpha-1}Q(t)x\mathrm{d}t, \qquad x \in X.$$

当 α 是负整数时，定理 3.2.2 说明，上面所定义的 A^α 与通常意义下的定义是一致的．

例子 设 A 是 Hilbert 空间 H 中的正自伴算子, 其谱表示为 $A=\int_0^\infty \lambda \mathrm{d}E(\lambda)$, 则

$$A^\alpha=\int_0^\infty \lambda^\alpha \mathrm{d}E(\lambda), \qquad \forall\, \alpha<0.$$

事实上，根据

$$Q(t)x=\mathrm{e}^{-At}x=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}E(\lambda)x, \qquad \forall\, x\in H,$$

就可以推出

$$\begin{aligned} A^\alpha x &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^\infty t^{-\alpha-1}Q(t)x\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^\infty t^{-\alpha-1}\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}E(\lambda)x\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\left(\int_0^\infty t^{-\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}E(\lambda)x \\ &= \int_0^\infty \lambda^\alpha \mathrm{d}E(\lambda)x, \qquad \forall\, x\in H. \end{aligned}$$

定理 7.1.1 若 $A\in\mathcal{B}(X)$, 则

(1) $A^{-\alpha}=\dfrac{\sin\pi\alpha}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \lambda^{-\alpha}(A+\lambda)^{-1}\mathrm{d}\lambda, \ \ \forall\, \alpha\in(0,1)$;

(2) 存在正常数 C, 使得 $\|A^{-\alpha}\|\leqslant C, \ \ \forall\, \alpha\in(0,1)$;

(3) $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} A^{-\alpha}x=x, \ \ \forall\, x\in X$.

证明 (1) 定理 3.2.2 说明, 对任意 $x\in X$, 有

$$(A+\lambda)^{-1}x=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}Q(t)x\mathrm{d}t, \qquad \lambda\geqslant 0.$$

从而

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha}(A+\lambda)^{-1}x\mathrm{d}\lambda &= \int_0^\infty\int_0^\infty \lambda^{-\alpha}\mathrm{e}^{-\lambda t}Q(t)x\mathrm{d}t\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_0^\infty t^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)Q(t)x\mathrm{d}t \\ &= \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)A^{-\alpha}x, \end{aligned}$$

即结论 (1) 成立.

(2) 因为 $\|Q(t)\|\leqslant M\mathrm{e}^{-at}$ 且 $a>0$, 所以由定理 3.2.2 知, 当 $\lambda>0$ 时, 有

$$-\lambda\in\rho(A), \qquad \|(A+\lambda)^{-1}\|\leqslant M(\lambda+a)^{-1}.$$

因而由结论 (1) 推出

$$\begin{aligned}\|A^{-\alpha}\| &\leqslant \left|\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\right|\int_0^1 \lambda^{-\alpha}\|(A+\lambda)^{-1}\|\mathrm{d}\lambda \\ &\quad+\left|\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\right|\int_1^\infty \lambda^{-(1+\alpha)}\|\lambda(A+\lambda)^{-1}\|\mathrm{d}\lambda \\ &\leqslant \frac{M}{a}\left|\frac{\sin\pi(1-\alpha)}{\pi(1-\alpha)}\right|+M\left|\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\right|\leqslant C, \qquad \forall\,\alpha\in(0,1).\end{aligned}$$

(3) 首先假设 $x\in D(A)$. 那么存在 $y\in X$, 使得 $x=A^{-1}y$. 于是

$$A^{-\alpha}x-x=A^{-(1+\alpha)}y-A^{-1}y=\int_0^\infty\left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}-1\right)Q(t)y\mathrm{d}t.$$

因为 $\|Q(t)\|\leqslant M\mathrm{e}^{-at}$ 且 $a>0$, 所以

$$\|A^{-\alpha}x-x\|\leqslant M_1\|y\|\int_0^K\left|\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}-1\right|\mathrm{d}t+M_2\|y\|\int_K^\infty t\mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t,$$

其中 $K\gg 1$. 由此推出

$$\lim_{\alpha\to0^+}A^{-\alpha}x=x, \qquad \forall\,x\in D(A).$$

由于 $\overline{D(A)}=X$ 且 $A^{-\alpha}$ 关于 $\alpha\in(0,1)$ 一致有界，因此

$$\lim_{\alpha\to0^+}A^{-\alpha}x=x, \qquad \forall\,x\in X.$$

引理 7.1.2 若 $A\in\mathcal{B}(X)$, 则 $A^\alpha A^\beta=A^{\alpha+\beta}$ 对任意 $\alpha,\beta<0$ 成立.

证明 对任意 $x\in X$, 我们有

$$\begin{aligned}A^\alpha A^\beta x&=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^\infty t^{-\alpha-1}Q(t)A^\beta x\mathrm{d}t\\ &=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}\int_0^\infty\int_0^\infty t^{-\alpha-1}Q(t)s^{-\beta-1}Q(s)x\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\ &=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}\int_0^\infty\int_t^\infty t^{-\alpha-1}(r-t)^{-\beta-1}Q(r)x\mathrm{d}r\mathrm{d}t\\ &=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}\int_0^\infty\int_0^r t^{-\alpha-1}(r-t)^{-\beta-1}Q(r)x\mathrm{d}t\mathrm{d}r\\ &=\frac{1}{\Gamma(-\alpha-\beta)}\int_0^\infty r^{-\alpha-\beta-1}Q(r)x\mathrm{d}r\\ &=A^{\alpha+\beta}x.\end{aligned}$$

故结论成立.

引理 7.1.3 若 $A \in \mathcal{B}(X)$, 则对任意 $\alpha < 0$, A^α 是 1–1 的, 且 A^α 的值域在 X 中稠.

证明 取 $-n < \alpha$. 由 $A^{-n} = A^\alpha A^{-n-\alpha}$ 知, $\mathcal{R}(A^{-n}) \subset \mathcal{R}(A^\alpha)$. 利用定理 3.2.1 便知, $\mathcal{R}(A^{-n}) = D(A^n)$ 在 X 中稠, 从而 $\mathcal{R}(A^\alpha)$ 在 X 中也是稠的. 下证 A^α 是 1–1 的.

如果 $A^\alpha x = 0$, 那么 $A^{-n}x = A^{-n-\alpha}A^\alpha x = 0$. 因而, $A^{-n+1}x = AA^{-n}x = 0, \cdots$, 故 $x = 0$. 这说明 A^α 是 1–1 的.

由引理 7.1.3 知, 下面的定义是合理的.

定义 7.1.2 对于 $A \in \mathcal{B}(X)$ 和 $\alpha \geqslant 0$, 定义 A^α 是 $A^{-\alpha}$ 的逆映射, 即

$$A^0 = I, \quad D(A^\alpha) = \mathcal{R}(A^{-\alpha}), \qquad A^\alpha A^{-\alpha}x = x, \qquad \forall\, x \in X.$$

定理 7.1.4 设 $A \in \mathcal{B}(X)$. 我们有

(1) A^α 是闭稠定的, 且 $0 \in \rho(A^\alpha)$, $(A^\alpha)^{-1} = A^{-\alpha}$ 对所有 $\alpha > 0$ 成立;

(2) 对于 $\alpha \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$ 和 $x \in D(A^\alpha)$, 有 $A^\alpha Q(t)x = Q(t)A^\alpha x$;

(3) 当 $\alpha > \beta$ 时, 有 $D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$;

(4) 对于 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 及 $x \in D(A^\beta) \cap D(A^{\alpha+\beta})$, 有 $A^{\alpha+\beta}x = A^\alpha A^\beta x$;

(5) 对于 $\alpha \in [0,1]$ 和 $x \in D(A)$, 成立 $\|A^\alpha x\| \leqslant 2(M+1)\|Ax\|^\alpha \|x\|^{1-\alpha}$;

(6) 存在正常数 C, 使得对所有 $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [0,1]$, $x \in D(A^\alpha)$ 和 $t > 0$, 均成立

$$\|x - \mathrm{e}^{\lambda t}Q(t)x\| \leqslant C(1+\mathrm{e}^{\lambda t})^{1-\alpha}\left((1+|\lambda|)\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}-1}{\lambda}\right)^\alpha \|A^\alpha x\|.$$

证明 由定义 7.1.2 和引理 7.1.3 知, 结论 (1) 成立.

当 $\alpha < 0$ 时, 由定义 7.1.1 和命题 1.2.11 知, 结论 (2) 成立. 当 $\alpha > 0$ 时, 因为 $(A^\alpha)^{-1} = A^{-\alpha}$, 所以存在 $y \in X$, 使得 $x = A^{-\alpha}y$. 于是

$$Q(t)A^\alpha x = Q(t)y = A^\alpha A^{-\alpha}Q(t)y = A^\alpha Q(t)A^{-\alpha}y = A^\alpha Q(t)x.$$

这说明结论 (2) 成立.

当 $\alpha > \beta > 0$ 时, 由引理 7.1.2 知, $A^{-\alpha} = A^{-\beta}A^{\beta-\alpha}$. 故结论 (3) 成立. 当 $\beta \leqslant 0$ 时, 由于 $D(A^\beta) = X$, 故结论 (3) 显然成立.

如果 $\alpha \leqslant 0$ 且 $\beta \leqslant 0$, 那么由引理 7.1.2 知, 结论 (4) 成立.

如果 $\alpha \leqslant 0, \beta > 0$ 且满足 $\alpha + \beta > 0$, 那么由 $A^{-(\alpha+\beta)}A^\alpha = A^{-\beta}$ 知, $A^{-(\alpha+\beta)}A^\alpha A^\beta x = x$, $\forall\, x \in D(A^\beta) \cap D(A^{\alpha+\beta})$. 所以结论 (4) 成立.

如果 $\alpha \leqslant 0, \beta > 0$ 且满足 $\alpha + \beta \leqslant 0$, 那么对任意 $x \in D(A^\beta) \cap D(A^{\alpha+\beta})$, 有 $A^{\alpha+\beta}x = A^{\alpha+\beta}A^{-\beta}A^\beta x = A^\alpha A^\beta x$. 故结论 (4) 成立.

如果 $\alpha>0,\beta\leqslant 0$ 且满足 $\alpha+\beta>0$, 那么由 $A^{\beta}A^{-(\alpha+\beta)}=A^{-\alpha}$ 知, $A^{\beta}x=A^{-\alpha}A^{\alpha+\beta}x,\ \forall\, x\in D(A^{\beta})\cap D(A^{\alpha+\beta})$. 故结论 (4) 成立.

如果 $\alpha>0,\beta\leqslant 0$ 且满足 $\alpha+\beta\leqslant 0$, 那么对任意 $x\in X$, 有 $A^{-\alpha}A^{\alpha+\beta}x=A^{\beta}x$. 故结论 (4) 成立.

如果 $\alpha>0$ 且 $\beta>0$, 那么由 $A^{-\beta}A^{-\alpha}=A^{-(\alpha+\beta)}$ 知, $A^{-\beta}A^{-\alpha}A^{\alpha+\beta}x=x,\ \forall\, x\in D(A^{\beta})\cap D(A^{\alpha+\beta})$. 故结论 (4) 成立.

要证明结论 (5), 只需考虑 $\alpha\in(0,1)$ 且 $x\in D(A)$ 的情况. 由定理 7.1.1 得

$$\|A^{\alpha}x\|=\|A^{\alpha-1}Ax\|\leqslant\frac{\sin\pi(1-\alpha)}{\pi}\int_0^{\infty}\lambda^{\alpha-1}\|(A+\lambda)^{-1}Ax\|\mathrm{d}\lambda.$$

因为当 $\lambda>0$ 时, $\|(A+\lambda)^{-1}\|\leqslant\frac{M}{\lambda}$ 且 $\|A(A+\lambda)^{-1}\|\leqslant M+1$, 所以对任意 $\varepsilon>0$, 有

$$\begin{aligned}\|A^{\alpha}x\|&\leqslant\frac{\sin\pi(1-\alpha)}{\pi}\int_0^{\varepsilon}(M+1)\|x\|\lambda^{\alpha-1}\mathrm{d}\lambda+\int_{\varepsilon}^{\infty}M\|Ax\|\lambda^{\alpha-2}\,\mathrm{d}\lambda\\&=\frac{\sin\pi(1-\alpha)}{\pi}\left(\frac{\varepsilon^{\alpha}(M+1)\|x\|}{\alpha}+\frac{\varepsilon^{\alpha-1}M\|Ax\|}{1-\alpha}\right)\\&\leqslant\varepsilon^{\alpha}(M+1)\|x\|+\varepsilon^{\alpha-1}M\|Ax\|.\end{aligned}$$

上式右端关于 ε 取极小, 即得

$$\begin{aligned}\|A^{\alpha}x\|&\leqslant(M+1)^{1-\alpha}M^{\alpha}\|x\|^{1-\alpha}\|Ax\|^{\alpha}\left\{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha-1}\right\}\\&\leqslant 2(M+1)\|x\|^{1-\alpha}\|Ax\|^{\alpha}.\end{aligned}$$

由此知结论 (5) 成立.

下证结论 (6) . 记 $z=x-\mathrm{e}^{\lambda t}Q(t)x$. 利用结论 (2), (4) 和 (5) 知

$$\|z\|=\|A^{1-\alpha}A^{\alpha-1}z\|\leqslant 2(M+1)\|A^{\alpha}z\|^{1-\alpha}\|A^{\alpha-1}z\|^{\alpha}.$$

因为

$$\begin{aligned}\|A^{\alpha}z\|&=\|A^{\alpha}x-\mathrm{e}^{\lambda t}Q(t)A^{\alpha}x\|\leqslant M(1+\mathrm{e}^{\lambda t})\|A^{\alpha}x\|,\\A^{\alpha-1}z&=-A^{-1}\int_0^t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathrm{e}^{\lambda s}Q(s)A^{\alpha}x)\mathrm{d}s\\&=(A-\lambda)A^{-1}\int_0^t\mathrm{e}^{\lambda s}Q(s)A^{\alpha}x\mathrm{d}s,\\\|A^{\alpha-1}z\|&\leqslant C(1+|\lambda|)\int_0^t\mathrm{e}^{\lambda s}\|A^{\alpha}x\|\,\mathrm{d}s\leqslant C(1+|\lambda|)\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}-1}{\lambda}\|A^{\alpha}x\|,\end{aligned}$$

所以结论 (6) 成立.

定理 7.1.5 设 $A \in \mathcal{B}(X)$, $0 < \alpha < 1$. 若 $x \in D(A)$, 则

$$A^{\alpha}x = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1}(t+A)^{-1}Ax\mathrm{d}t.$$

证明 因为 $0 < 1-\alpha < 1$, 所以由定理 7.1.1 得

$$A^{\alpha-1}x = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1}(t+A)^{-1}x\mathrm{d}t.$$

由 $x \in D(A)$ 知, $x \in D(A^{\alpha})$ 且 $A^{\alpha-1}x \in D(A)$. 由于 A 是闭的, 因此只要下式右端的积分存在, 就有

$$A^{\alpha}x = A(A^{\alpha-1}x) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1}(t+A)^{-1}Ax\mathrm{d}t.$$

根据 $\|(t+A)^{-1}\| \leqslant \dfrac{M}{a+t}$, 推知

$$\|t^{\alpha-1}(t+A)^{-1}Ax\| \leqslant Mt^{\alpha-1}(t+a)^{-1}\|Ax\|, \qquad t \geqslant 0.$$

上式结合 $0 < \alpha < 1$ 就可推出积分 $\displaystyle\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}(t+A)^{-1}Ax\mathrm{d}t$ 的存在性. 故定理的结论成立.

为了控制拟线性抛物型方程中的非线性项, 往往需要获得与分数幂算子有关的估计. 在此方面, 下述定理将起到关键性的作用.

定理 7.1.6 设 $A \in \mathcal{B}(X)$, B 是从 X 到 Banach 空间 Y 的闭线性算子, 满足 $D(B) \supset D(A)$. 若存在 $\beta \in [0,1)$ 和正常数 C, 使得

$$\|Bx\|_Y \leqslant C\|Ax\|^{\beta}\|x\|^{1-\beta}, \qquad \forall\, x \in D(A). \tag{7.1}$$

则当 $\alpha > \beta$ 时, 有 $D(B) \supset D(A^{\alpha})$, 并且 $BA^{-\alpha} \in \mathcal{L}(X,Y)$.

证明 取 $\gamma \in (\beta, 1)$, $\gamma \leqslant \alpha$ 以及 $x \in D(A^{\gamma})$. 由定理 7.1.1 得

$$x = A^{-\gamma}A^{\gamma}x = \int_0^{\infty} f(\lambda)\mathrm{d}\lambda,$$

其中

$$f(\lambda) = \frac{\sin \pi\gamma}{\pi}\lambda^{-\gamma}(A+\lambda)^{-1}A^{\gamma}x.$$

由不等式 (7.1) 知, $Bf \in C((0,\infty), Y)$, 并且

$$\begin{aligned}\|Bf(\lambda)\|_Y &\leqslant C\|\lambda^{-\gamma}A(A+\lambda)^{-1}A^{\gamma}x\|^{\beta}\|\lambda^{-\gamma}(A+\lambda)^{-1}A^{\gamma}x\|^{1-\beta}\\ &\leqslant C\lambda^{-\gamma}\|A(A+\lambda)^{-1}\|^{\beta}\|(A+\lambda)^{-1}\|^{1-\beta}\|A^{\gamma}x\|.\end{aligned}$$

因为当 $\lambda > 0$ 时，有

$$\|(A+\lambda)^{-1}\| \leqslant \frac{M}{\lambda+a}, \qquad \|A(A+\lambda)^{-1}\| \leqslant 1+M,$$

所以

$$\|Bf(\lambda)\|_Y \leqslant C(1+M)\lambda^{-\gamma}(\lambda+a)^{\beta-1}\|A^\gamma x\|,$$
$$\int_0^\infty \|Bf(\lambda)\|_Y \mathrm{d}\lambda \leqslant C_1\|A^\gamma x\|.$$

这说明，Bf 在 $(0,\infty)$ 上 Bochner 可积. 于是由命题 1.2.11 知，$x = \int_0^\infty f \in D(B)$ 且 $\|Bx\|_Y \leqslant C_1\|A^\gamma x\|$. 因此，$D(B) \supset D(A^\gamma) \supset D(A^\alpha)$, 并且

$$\|BA^{-\alpha}x\|_Y = \|BA^{-\gamma}A^{\gamma-\alpha}x\|_Y \leqslant C_1\|A^\gamma(A^{-\gamma}A^{\gamma-\alpha})x\| \leqslant C_1\|A^{\gamma-\alpha}\|\cdot\|x\|.$$

从而定理得证.

定理 7.1.7 设 $A, B \in \mathcal{B}(X)$ 满足 $D(A) = D(B)$. 如果存在 $\alpha \in [0,1)$ 和正常数 C, 使得

$$\|(A-B)x\| \leqslant C\|Ax\|^\alpha\|x\|^{1-\alpha}, \qquad \forall\, x \in D(A). \tag{7.2}$$

那么，$D(A^\beta) = D(B^\beta)$ 对所有 $\beta \in [0,1]$ 均成立.

证明 当 $\beta = 0$ 或 1 时，结论显然成立. 下面假设 $\beta \in (0,1)$, $x \in X$. 由定理 7.1.1 得

$$B^{-\beta}x - A^{-\beta}x = \frac{\sin\pi\beta}{\pi}\int_0^\infty f(\lambda)\mathrm{d}\lambda, \tag{7.3}$$

其中

$$f(\lambda) = \lambda^{-\beta}(B+\lambda)^{-1}(A-B)(A+\lambda)^{-1}x.$$

注意到存在正常数 a 和 M, 使得

$$\|(A+\lambda)^{-1}\| \leqslant \frac{M}{\lambda+a}, \qquad \|(B+\lambda)^{-1}\| \leqslant \frac{M}{\lambda+a}, \qquad \forall\, \lambda > 0,$$

所以由定理 7.1.4 的结论 (5) 知，存在正常数 C_1, 使得

$$\|B^\beta(B+\lambda)^{-1}\| \leqslant C_1(\lambda+a)^{\beta-1}, \qquad \forall\, \lambda > 0.$$

另一方面，由 (7.2) 式知，存在正常数 C_2, 使得

$$\|(A-B)(A+\lambda)^{-1}\| \leqslant C_2(\lambda+a)^{\alpha-1}, \qquad \forall\, \lambda > 0.$$

于是

$$\|B^\beta f(\lambda)\| \leqslant C_1 C_2 \lambda^{-\beta}(\lambda+a)^{\alpha+\beta-2}\|x\|.$$

这表明， $B^\beta f$ 在 $(0,\infty)$ 上 Bochner 可积. 从而由命题 1.2.11 知， $\int_0^\infty f \in D(B^\beta)$. 因此由 (7.3) 式得， $A^{-\beta}x \in D(B^\beta)$. 故 $D(A^\beta) \subset D(B^\beta)$.

根据 (7.2) 式，还有

$$\begin{aligned}\|(A-B)x\| &\leqslant C\|AB^{-1}\|^\alpha \|Bx\|^\alpha \|x\|^{1-\alpha}\\ &\leqslant C_3\|Bx\|^\alpha\|x\|^{1-\alpha}, \qquad \forall\, x \in D(B).\end{aligned}$$

类似于上面的讨论，可证 $D(B^\beta) \subset D(A^\beta)$. 所以 $D(B^\beta) = D(A^\beta)$.

推论 7.1.8 设 $A \in \mathcal{B}(X)$, $b > 0$, $\alpha \in [0,1]$, 则 $D(A^\alpha) = D((A+b)^\alpha)$.

定理 7.1.9 设 A 是扇形算子. 如果存在常数 a 和 b, 使得对任意 $\lambda \in \sigma(A)$, 均有 $\operatorname{Re}\lambda > b \geqslant a$. 那么对每一个 $n \geqslant 1$, 均存在正常数 $C(n)$, 使得

$$\|(A-a)^\alpha \mathrm{e}^{-At}\| \leqslant C(n)\, t^{-\alpha}\mathrm{e}^{-bt}, \qquad \forall\, t>0,\ \alpha \in [0,\, n].$$

证明 由引理 3.3.5 和定理 3.3.6 知，存在 $\delta > 0$, M 和 θ, 使得 $A \in \mathcal{U}(b+\delta, M, \theta, X)$. 另由定理 3.3.8 推出， $\|\mathrm{e}^{-At}\| \leqslant C_1\mathrm{e}^{-(b+\delta)t}$. 从而由定理 3.3.14 知

$$\begin{aligned}\|(A-a)\mathrm{e}^{-At}\| &= \|\{A-(b+\delta)+b+\delta-a\}\mathrm{e}^{-At}\|\\ &\leqslant \|\{A-(b+\delta)\}\mathrm{e}^{-At}\| + \|(b+\delta-a)\mathrm{e}^{-At}\|\\ &\leqslant C_2(1+t^{-1})\mathrm{e}^{-(b+\delta)t}\\ &\leqslant C_3 t^{-1}\mathrm{e}^{-bt}, \qquad \forall\, t>0.\end{aligned}$$

注意到 $A-a \in \mathcal{B}(X)$, 所以由定理 7.1.4 的结论 (5) 知

$$\begin{aligned}\|(A-a)^\alpha \mathrm{e}^{-At}\| &\leqslant 2(1+C_1)\|(A-a)\mathrm{e}^{-At}\|^\alpha \|\mathrm{e}^{-At}\|^{1-\alpha}\\ &\leqslant C_4 t^{-\alpha}\mathrm{e}^{-bt}, \qquad \forall\, t>0,\ \alpha\in[0,1],\end{aligned}$$

其中 $C_4 = 2(1+C_1)C_3^\alpha C_1^{1-\alpha}$. 当 $0 \leqslant \alpha \leqslant n$ 时，对任意 $t>0$, 利用定理 7.1.4 的结论 (2) 知

$$(A-a)^\alpha \mathrm{e}^{-At} = ((A-a)^{\alpha/n}\mathrm{e}^{-At/n})^n.$$

从而

$$\|(A-a)^\alpha \mathrm{e}^{-At}\| \leqslant \{C_4(t/n)^{-\alpha/n}\mathrm{e}^{-bt/n}\}^n := C(n)t^{-\alpha}\mathrm{e}^{-bt}.$$

为了简化记号，现引入下面的定义.

定义 7.1.3 设 A 是 Banach 空间 X 上的扇形算子, 存在常数 a 使得 $\mathrm{Re}\,\lambda > a$ 对所有 $\lambda \in \sigma(A)$ 成立. 对于 $\alpha \geqslant 0$, 定义 $X^\alpha = D((A-a)^\alpha)$, 以及

$$\|x\|_\alpha = \|(A-a)^\alpha x\|, \qquad x \in X^\alpha.$$

称 X^α 为 X 的 **分数幂空间** .

定理 7.1.4 的结论 (1) 说明, $0 \in \rho((A-a)^\alpha)$. 从而赋予范数 $\|\cdot\|_\alpha$ 的空间 X^α 是一个 Banach 空间. 由推论 7.1.8 知, X^α 不依赖于 a 的选取. 对于不同的 a, X^α 中的范数 $\|\cdot\|_\alpha$ 都是等价的.

定理 7.1.10 设 A 是扇形算子, $n \geqslant 1$, 则存在正常数 C, 使得

$$\|\mathrm{e}^{-A(t+h)}x - \mathrm{e}^{-At}x\|_\alpha \leqslant C(\mathrm{e}^{-a(t+h)} + \mathrm{e}^{-at})h^\delta t^{\beta-\alpha-\delta}\|x\|_\beta$$

对任意 $h>0, t>0$, $\delta \in [0,1]$, $\alpha \in [0, n]$, $\beta \in [0, \alpha+\delta]$ 以及 $x \in X^\beta$ 均成立.

证明 选取 $a \in \mathbb{R}$, 使得 $\mathrm{Re}\,\lambda > a$ 对所有 $\lambda \in \sigma(A)$ 成立. 定义

$$A_1 = A - a, \qquad z = A_1^\alpha(\mathrm{e}^{-A(t+h)} - \mathrm{e}^{-At})x.$$

注意到

$$z = (A_1^{\alpha+\delta-\beta}\mathrm{e}^{-At})(\mathrm{e}^{-A_1h}\mathrm{e}^{-ah} - I)A_1^{-\delta}A_1^\beta x,$$

所以由定理 7.1.9 得

$$\|z\| \leqslant C_1 t^{\beta-\alpha-\delta}\mathrm{e}^{-at}\|(\mathrm{e}^{-A_1h}\mathrm{e}^{-ah} - I)A_1^{-\delta}A_1^\beta x\|.$$

再利用定理 7.1.4 的结论 (6) 知, 定理的结论成立 (在定理 7.1.4 的结论 (6) 中, 取 $\lambda = -a$, $\alpha = \delta$, 并用 $A_1^{-\delta}A_1^\beta x$ 替代 x) .

定理 7.1.11 设 A 是扇形算子, $A \in \mathcal{B}(X)$, $0 < \alpha \leqslant 1$. 若 $x \in D(A^\alpha)$, 则

$$\|(\mathrm{e}^{-At} - I)x\| \leqslant \frac{C}{\alpha}t^\alpha\|A^\alpha x\|.$$

证明 由定理 3.2.1 的结论 (3) 知, 对于 $t > \tau > 0$, 有

$$(\mathrm{e}^{-At} - \mathrm{e}^{-A\tau})x = -A\int_\tau^t \mathrm{e}^{-As}x\mathrm{d}s, \qquad \forall\, x \in X.$$

因为 A 是扇形算子, 所以由定理 3.3.12 推知, 对任意 $s>0$, 有 $\mathrm{e}^{-As}x \in D(A)$. 特别当 $x \in D(A^\alpha)$ 时, 由定理 7.1.4 的结论 (2) 和定理 7.1.9 知, $A^\alpha \mathrm{e}^{-At}x = \mathrm{e}^{-At}A^\alpha x$, 且

$$\begin{aligned}\int_\tau^t \|A\mathrm{e}^{-As}x\|\mathrm{d}s &= \int_\tau^t \|A^{1-\alpha}\mathrm{e}^{-As}A^\alpha x\|\mathrm{d}s \\ &\leqslant C\int_\tau^t s^{\alpha-1}\|A^\alpha x\|\mathrm{d}s \leqslant \frac{C}{\alpha}t^\alpha\|A^\alpha x\|.\end{aligned}$$

因此，利用命题 1.2.11 可得

$$(\mathrm{e}^{-At}-\mathrm{e}^{-A\tau})x=-\int_\tau^t A\mathrm{e}^{-As}x\mathrm{d}s,\qquad \forall\, x\in X.$$

从而

$$\|(\mathrm{e}^{-At}-\mathrm{e}^{-A\tau})x\| \leqslant \int_\tau^t \|A\mathrm{e}^{-As}x\|\mathrm{d}s\leqslant \frac{C}{\alpha}t^\alpha\|A^\alpha x\|,\qquad \forall\, x\in X.$$

在上式中令 $\tau\to 0^+$, 就得到所要的结论.

§7.2 由微分算子确定的分数幂空间

取 $X=L^p(\Omega)$, A_p 同于 3.4 节. 本节将利用算子 A_p 来构造 Banach 空间 X 的分数幂空间.

设 $a<0$ 满足 $\mathrm{Re}\,\sigma(A_p-a)>0$, 于是就得到分数幂空间

$$X^\alpha=D((A_p-a)^\alpha),\qquad 0\leqslant\alpha\leqslant 1.$$

不失一般性，假设 $\mathrm{Re}\,\sigma(A_p)>0$, $X^\alpha=D(A_p^\alpha)$. 由命题 3.4.3 知

$$\|u\|_{2m,p}\leqslant C(\|A_pu\|_p+\|u\|_p),\qquad \forall\, u\in D(A_p).$$

因为在 $L^p(\Omega)$ 中 A_p 具有有界的逆算子，所以存在正常数 C, 使得

$$\|u\|_{2m,p}\leqslant C\|A_pu\|_p,\qquad \forall\, u\in D(A_p). \tag{7.4}$$

在讨论 X^α 的性质之前，先给出下面的 Nirenberg–Gagliardo 不等式.

引理 7.2.1 (Nirenberg–Gagliardo) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界区域，$\partial\Omega\in C^m$, $u\in W^{m,p}(\Omega)\cap L^r(\Omega)$.

(1) 若 $q\geqslant p$, $q\geqslant r$, $0\leqslant\theta\leqslant 1$ 满足

$$k-\frac{N}{q}\leqslant\theta\Big(m-\frac{N}{p}\Big)-N\frac{1-\theta}{r},$$

并且当 $p=1$ 或者 $r=1$ 时，不等式严格成立. 则有

$$\|u\|_{k,q}\leqslant C\|u\|_{m,p}^\theta\|u\|_r^{1-\theta}.$$

(2) 若 $0\leqslant\theta\leqslant 1$ 且 $\nu\leqslant\theta\Big(m-\dfrac{N}{p}\Big)-N\dfrac{1-\theta}{r}$ (当 $p=1$, 或者 $r=1$, 或者 ν 是正整数，三者之一成立时，要求不等式严格成立)，则有

$$\|u\|_{C^\nu}=\|u\|_\nu\leqslant C\|u\|_{m,p}^\theta\|u\|_r^{1-\theta}.$$

现在证明下面的嵌入结论.

定理 7.2.2 设 $\partial\Omega \in C^m$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, 则

$$X^\alpha \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega), \qquad 当\ k - \frac{N}{q} < 2m\alpha - \frac{N}{p},\ p \leqslant q\ 时;$$

$$X^\alpha \hookrightarrow C^\nu(\bar{\Omega}), \qquad 当\ 0 \leqslant \nu < 2m\alpha - \frac{N}{p}\ 时.$$

此外, 以上嵌入都是连续的.

证明 由引理 7.2.1 的结论 (1) 和 (7.4) 式知, 若 $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, 且

$$q \geqslant p, \qquad k - \frac{N}{q} < \theta\Big(2m - \frac{N}{p}\Big) - N\frac{1-\theta}{p} = 2m\theta - \frac{N}{p}, \tag{7.5}$$

则成立

$$\|Bu\|_q = \|u\|_{k,q} \leqslant C\|u\|_{2m,p}^\theta \|u\|_p^{1-\theta} \leqslant C\|A_p u\|_p^\theta \|u\|_p^{1-\theta}, \qquad \forall\, u \in D(A_p), \tag{7.6}$$

其中

$$B = \sum_{|\beta| \leqslant k} D^\beta, \qquad D(B) = W^{k,q}(\Omega) \subset X = L^p(\Omega).$$

显然, B 是闭线性算子, 并且 $D(B) \supset D(A_p)$. 利用已知条件, 我们可以取到 $\theta < \alpha$, 使之满足 (7.5) 式. 于是利用定理 7.1.6 可得

$$D(B) \supset D(A_p^\alpha), \qquad BA_p^{-\alpha} \in \mathcal{L}(L^p(\Omega), L^q(\Omega)).$$

从而根据

$$X^\alpha = D(A_p^\alpha) = \mathcal{R}(A_p^{-\alpha}), \qquad BA_p^{-\alpha} \in \mathcal{L}(L^p(\Omega), L^q(\Omega))$$

知, $X^\alpha \hookrightarrow D(B) = W^{k,q}(\Omega)$. 注意到

$$\|Bx\|_q = \|BA_p^{-\alpha}A_p^\alpha x\|_q \leqslant C\|A_p^\alpha x\|_p = C\|x\|_\alpha, \qquad \forall x \in X^\alpha,$$

因此, 易知上面的嵌入是连续的.

类似可证定理 7.2.2 的后一个结论. 证毕.

例子 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $p = 2$, 即 $X = L^2(\Omega)$, $A = -\Delta$, $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. 根据定理 7.2.2 , 有

$$X^\alpha \hookrightarrow C^\nu(\bar{\Omega}),\ 如果\ \alpha > \frac{3}{4},\ \nu < \frac{1}{2}(4\alpha - 3);$$

$$X^\alpha \hookrightarrow W^{1,q}(\Omega),\ 如果\ \alpha > \frac{1}{2},\ \frac{1}{q} > \frac{1}{6}(5 - 4\alpha);$$

$$X^\alpha \hookrightarrow L^q(\Omega),\ 如果\ \frac{1}{q} > \frac{1}{6}(3 - 4\alpha).$$

§7.3 非齐次问题

设 A 是 Banach 空间 X 上的扇形算子, $T \in (0,\infty)$, $f:[0,T] \to X$ 有界且 Bochner 可积. 本节的目的是推导函数

$$v(t) := \int_0^t \mathrm{e}^{-A(t-s)} f(s)\mathrm{d}s$$

的一些基本性质, 这些性质在研究拟线性抛物型方程的适度解的正则性时非常重要.

定理 7.3.1 $v \in C^{1-\alpha}([0,T], X^\alpha) \cap C^\alpha([0,T], X)$, $\forall\, \alpha \in (0,1)$.

证明 假设对任意 $\lambda \in \sigma(A)$, 均有 $\mathrm{Re}\,\lambda > a$. 令 $A_1 = A - a$, 并记

$$v(t+h) - v(t) = \int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s + \int_t^{t+h} g_2(s)\mathrm{d}s, \qquad 0 \leqslant t \leqslant t+h \leqslant T,$$

其中

$$g_1(s) = [\mathrm{e}^{-A(t+h-s)} - \mathrm{e}^{-A(t-s)}]f(s), \qquad g_2(s) = \mathrm{e}^{-A(t+h-s)}f(s).$$

于是

$$\begin{aligned} g_1(s) &= \int_{t-s}^{t+h-s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{e}^{-A\xi} f(s)\mathrm{d}\xi \\ &= -\int_{t-s}^{t+h-s} A\mathrm{e}^{-A\xi} f(s)\mathrm{d}\xi \\ &= -A\int_{t-s}^{t+h-s} \mathrm{e}^{-A\xi} f(s)\mathrm{d}\xi, \\ A_1^\alpha g_1(s) &= -AA_1^{-1}\int_{t-s}^{t+h-s} A_1^{1+\alpha}\mathrm{e}^{-A\xi} f(s)\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

利用 f 的有界性和定理 7.1.9 知

$$\begin{aligned} \|A_1^\alpha g_1(s)\| &\leqslant C_1\int_{t-s}^{t+h-s} \xi^{-(1+\alpha)}\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{C_1}{\alpha}[(t-s)^{-\alpha} - (t+h-s)^{-\alpha}], \end{aligned}$$

$$\int_0^t \|A_1^\alpha g_1(s)\|\mathrm{d}s \leqslant \frac{C_1}{(\alpha-\alpha^2)}h^{1-\alpha}.$$

同理可得

$$\int_t^{t+h}\|A_1^\alpha g_2(s)\|\mathrm{d}s \leqslant C_2\int_t^{t+h}(t+h-s)^{-\alpha}\mathrm{d}s = \frac{C_2}{(1-\alpha)}h^{1-\alpha}.$$

从而由命题 1.2.11 知， $v\in C^{1-\alpha}([0,T],X^\alpha)$. 注意到

$$\|v(t+h)-v(t)\|\leqslant\|A_1^{\alpha-1}\|\cdot\|v(t+h)-v(t)\|_{1-\alpha},$$

因此，上面的结果说明， $v\in C^\alpha([0,T],X)$. 证毕.

定义

$$G(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{-A(t-s)}(f(s)-f(t))\mathrm{d}s,.$$

那么

$$\begin{aligned} v(t) &= G(t)+\int_0^t \mathrm{e}^{-A(t-s)}f(t)\mathrm{d}s \\ &= G(t)+\int_0^t \mathrm{e}^{-As}f(t)\mathrm{d}s, \qquad \forall\, t\in[0,T]. \end{aligned} \tag{7.7}$$

引理 7.3.2 设 $\mu\in(0,1)$, $\alpha\in[0,\mu)$, $f\in C^\mu([0,T],X)$. 则对任意 $t\in[0,T]$, 有 $G(t)\in X^{1+\alpha}$, 且 $AG\in C^{\mu-\alpha}([0,T],X^\alpha)$.

证明 取 $0\leqslant t<t+h\leqslant T$, 则有

$$G(t+h)-G(t)=\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s+\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s+\int_t^{t+h}g_3(s)\mathrm{d}s, \tag{7.8}$$

其中

$$\begin{aligned} g_1(s) &= (\mathrm{e}^{-A(t+h-s)}-\mathrm{e}^{-A(t-s)})(f(s)-f(t)), \\ g_2(s) &= \mathrm{e}^{-A(t+h-s)}(f(t)-f(t+h)), \\ g_3(s) &= \mathrm{e}^{-A(t+h-s)}(f(s)-f(t+h)). \end{aligned}$$

因为

$$A(\mathrm{e}^{-A(t+h-s)}-\mathrm{e}^{-A(t-s)})=\mathrm{e}^{-A(t-s)/2}A(\mathrm{e}^{-A(h+(t-s)/2)}-\mathrm{e}^{-A(t-s)/2}),$$

所以由定理 7.1.9 和 (3.40) 式得

$$\|Ag_1(s)\|_\alpha\leqslant C_2\,h(t-s+2h)^{-1}(t-s)^{\mu-\alpha-1}.$$

从而

$$\int_0^t \|Ag_1(s)\|_\alpha \mathrm{d}s \leqslant C_2\, h^{\mu-\alpha}\int_0^{t/h}(2+r)^{-1}r^{\mu-\alpha-1}\mathrm{d}r \leqslant C_3\, h^{\mu-\alpha}. \qquad (7.9)$$

由于

$$\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s = \int_0^t \mathrm{e}^{-A(\tau+h)}(f(t)-f(t+h))\mathrm{d}\tau,$$

因此，根据定理 3.2.1 的结论 (3) 知

$$A\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{-Ah}(I-\mathrm{e}^{-At})(f(t)-f(t+h)),$$

进而得到

$$\left\|A\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\right\|_\alpha \leqslant C_4\, h^{\mu-\alpha}. \qquad (7.10)$$

另一方面，由定理 7.1.9 和 (3.38) 式得

$$\int_t^{t+h}\|Ag_3(s)\|_\alpha \mathrm{d}s \leqslant C_5\int_t^{t+h}(t+h-s)^{\mu-\alpha-1}\mathrm{d}s = C_5(\mu-\alpha)^{-1}h^{\mu-\alpha}.$$

联立上式与 (7.8)~(7.10) 式以及命题 1.2.11 便推出， $G(t+h)-G(t)\in D(A)$, 且有 $AG\in C^{\mu-\alpha}([0,T], X^\alpha)$. 证毕.

定理 7.3.3 设 $\mu\in(0,1)$, $\alpha\in[0,\mu)$, $\varepsilon\in(0,T)$, $f\in C^\mu([0,T],X)$. 那么以下结论成立:

(1) $v:(0,T)\to X^\alpha$ 可微，且 $v'\in C([0,T],X)\cap C^{\mu-\alpha}([\varepsilon,T], X^\alpha)$;

(2) $v\in C([0,T], X^1)$ 且 $Av\in C^\mu([\varepsilon,T],X)$;

(3) $v'+Av=f$ 在 $[0,T]$ 上成立.

证明 由引理 7.3.2 和 (7.7) 式知， $v(t)\in D(A)$, 并且成立

$$Av(t) = AG(t)+f(t)-\mathrm{e}^{-At}f(t), \qquad \forall\, t\in[0,T]. \qquad (7.11)$$

从而 $Av\in C([0,T],X)$. 根据定义， $v(t)$ 是问题

$$\begin{cases} v'(t)+Av(t)=f(t), & t>0,\\ v(0)=0 \end{cases}$$

的适度解. 于是由定理 3.5.3 和命题 1.2.11 推出

$$v(t)+\int_0^t Av(s)\mathrm{d}s = \int_0^t f(s)\mathrm{d}s.$$

因此 $v'+Av=f$ 在 $[0,T]$ 上成立，并且 $v'\in C([0,T],X)$. 故结论 (3) 成立.

不等式 (3.39) 说明，$\mathrm{e}^{-At}f \in C^{\mu}([\varepsilon, T], X)$. 从而 $Av \in C^{\mu}([\varepsilon, T], X)$. 故结论 (2) 成立.

利用结论 (3) 和 (7.11) 式，可得

$$v'(t) + AG(t) = \mathrm{e}^{-At}f(t).$$

因此由引理 7.3.2 和定理 7.1.9 以及定理 7.1.10 知，$v' \in C^{\mu-\alpha}([\varepsilon, T], X^{\alpha})$. 由此及命题 1.2.11 可推知

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}[(A-a)^{\alpha}v(t+h)-(A-a)^{\alpha}v(t)] &= \frac{1}{h}(A-a)^{\alpha}[v(t+h)-v(t)]\\ &= \frac{1}{h}(A-a)^{\alpha}\int_t^{t+h} v'(s)\mathrm{d}s\\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h}(A-a)^{\alpha}v'(s)\mathrm{d}s\\ &\to (A-a)^{\alpha}v'(t), \text{ 当 } h\to 0 \text{ 时,}\end{aligned}$$

即 $v: (0,T) \to X^{\alpha}$ 可微. 故结论 (1) 成立.

§7.4　整体存在性 —— 一个特殊情形

当非线性函数整体 Lipschitz 连续时，可以得到解的整体存在性、唯一性以及关于初值的连续依赖性 (参见定理 7.4.3). 利用保核收缩映射，我们可以把这些结果推广到局部 Lipschitz 连续的非线性函数 (见 7.5 节).

引理 7.4.1　设 $l \in (0,\infty)$, $p > 1$, $h \in L^p(0, l)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $g \in L^q(0, l)$. 定义

$$(Kg)(x) = \int_0^x h(x-s)g(s)\mathrm{d}s, \qquad x \in (0, l). \tag{7.12}$$

则当 $1/m \leqslant 1 - 1/p$ 时，$K \in \mathcal{L}(L^q(0, l))$, $K^m \in \mathcal{L}(L^1(0, l), L^{\infty}(0, l))$, 且有

$$\lim_{n\to\infty} \|K^n\|_{\mathcal{L}(L^1,L^{\infty})}^{1/n} = 0.$$

证明　在 $\mathbb{R}\backslash(0, l)$ 中，定义 $g = h = 0$. 则 $h \in L^1(\mathbb{R})$, 且 $|Kg| \leqslant |h| * |g|$ 在 $(0, l)$ 上成立. 利用 Young 不等式 (引理 2.5.8) 可得，$K \in \mathcal{L}(L^q(0, l))$ 且 $\|K\|_{\mathcal{L}(L^q)} \leqslant \|h\|_1$.

定义 $h_1 = h$, $h_{n+1} = h_n * h$. 对于 $1 \leqslant n \leqslant m$, 令 $1/p_n = 1 - n/m$, 其中 m 固定且满足 $1/m \leqslant 1 - 1/p$. 易知，在 $(0, l)$ 上有 $|K^n g| \leqslant |h_n| * |g|$. 我们断言：$h_i \in L^{p_i}(\mathbb{R})$ 对所有 $1 \leqslant i \leqslant m$ 成立. 事实上，当 $i = 1$ 时，这个结论显然成立. 假设该结论对 $i < m$ 均成立. 注意到 $1 + 1/p_{i+1} = 1/p_1 + 1/p_i$ 且 $h \in L^{p_1}(\mathbb{R})$ (因

为 $p_1 \leqslant p$), 因此，运用 Young 不等式可知，该结论对于 $i+1$ 也成立. 从而断言成立. 于是 $h_m \in L^\infty(\mathbb{R})$, $K^m \in \mathcal{L}(L^1(0,l), L^\infty(0,l))$, 且有

$$|(K^m g)(x)| \leqslant \|h_m\|_\infty \int_0^x |g(s)| \mathrm{d}s.$$

由此推出

$$\begin{aligned}
|(K^{2m} g)(x)| &\leqslant \|h_m\|_\infty \int_0^x |K^m g(s)| \mathrm{d}s \\
&\leqslant \|h_m\|_\infty \int_0^x \|h_m\|_\infty \int_0^s |g(\tau)| \mathrm{d}\tau \mathrm{d}s \\
&= \|h_m\|_\infty^2 \int_0^x (x-s)|g(s)| \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

利用归纳法可以推出，对任意 $i \geqslant 1$, 有

$$\begin{aligned}
&|(K^{im} g)(x)| \leqslant \frac{\|h_m\|_\infty^i}{(i-1)!} \int_0^x (x-s)^{i-1} |g(s)| \mathrm{d}s, \quad x \in (0,l), \\
&\|K^{im}\|_{\mathcal{L}(L^1, L^\infty)} \leqslant \frac{1}{l(i-1)!} \|l h_m\|_\infty^i.
\end{aligned}$$

对于任意的 $\varepsilon > 0$, 分解 $n = im + j$, 其中 $0 \leqslant j \leqslant m-1$. 则对任意 $g \in L^1(\mathbb{R})$, 有

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{-n} \|K^n g\|_\infty &= \|(\varepsilon^{-1} K)^j (\varepsilon^{-m} K^m)^i g\|_\infty \\
&\leqslant \|(\varepsilon^{-1} K)^j\|_{\mathcal{L}(L^\infty, L^\infty)} \|(\varepsilon^{-m} K^m)^i g\|_\infty \\
&\leqslant \|(\varepsilon^{-1} K)^j\|_{\mathcal{L}(L^\infty, L^\infty)} \|(\varepsilon^{-m} K^m)^i\|_{\mathcal{L}(L^1, L^\infty)} \|g\|_1.
\end{aligned}$$

于是

$$\varepsilon^{-n} \|K^n\|_{\mathcal{L}(L^1, L^\infty)} \leqslant \frac{1}{l(i-1)!} (\varepsilon^{-1} \|K\|_{\mathcal{L}(L^\infty, L^\infty)})^j \|\varepsilon^{-m} l h_m\|_\infty^i \stackrel{i \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

故 $\|K^n\|_{\mathcal{L}(L^1, L^\infty)}^{1/n} < \varepsilon$ 对充分大的 n 成立.

定理 7.4.2 (Gronwall 引理) 设 $l \in (0, \infty)$, $f \in L^1(0,l)$ 满足

$$f(x) \leqslant g(x) + \int_0^x h(x-s) f(s) \mathrm{d}s, \qquad \text{a.e.} \quad x \in (0,l),$$

其中 $h \geqslant 0$, $h \in L^p(0,l)$, $p > 1$ 且 $g \in L^q(0,l)$, $q \in [1, \infty]$. 则对于 (7.12) 式给出的算子 K, 有 $f \leqslant (I-K)^{-1} g = g + Kg + K^2 g + \cdots$.

证明 我们已经知道算子 $K \in \mathcal{L}(L^q(0,l))$. 注意到当 $n \geqslant 0$ 时，有 $f \leqslant g + Kg + \cdots + K^n g + K^{n+1} f$, 于是利用引理 7.4.1 和定理 2.1.9 即得结论.

定理 7.4.3 设 A 是 Banach 空间 X 中的扇形算子, $\alpha \in [0,1), T > 0$. 若 $H: [0,T] \times X^\alpha \to X$ 连续, 且存在 $L < \infty$, 使得

$$\|H(t,x) - H(t,y)\| \leqslant L\|x-y\|_\alpha, \qquad \forall\, 0 \leqslant t \leqslant T,\, x,y \in X^\alpha.$$

则对任意的 $u_0 \in X^\alpha$, 总存在唯一的 $u \in C([0,T], X^\alpha)$, 满足

$$u(t) = \mathrm{e}^{-At}u_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{-A(t-s)}H(s,u(s))\mathrm{d}s, \qquad \forall\, 0 \leqslant t \leqslant T.$$

此外, 如果 $G: X^\alpha \to C([0,T], X^\alpha)$ 由 $G(u_0) = u$ 定义, 那么存在正常数 C, 使得

$$\|G(u_0)(t) - G(v_0)(t)\|_\alpha \leqslant C\|u_0 - v_0\|_\alpha, \qquad \forall\, 0 \leqslant t \leqslant T,\, u_0, v_0 \in X^\alpha. \tag{7.13}$$

证明 记 $Y = C([0,T], X^\alpha)$. 易证, Y 是 Banach 空间. 对 $u \in Y$, 定义 Bu:

$$(Bu)(t) = \mathrm{e}^{-At}u_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{-A(t-s)}H(s,u(s))\mathrm{d}s, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

因为函数 $\mathrm{e}^{-At}u_0$ 在 X^α 中连续 (定理 7.1.10), 所以由定理 7.3.1 知, 当 $u \in Y$ 时, $Bu \in Y$. 若 $u, v \in Y$, 则由命题 1.2.11 和定理 7.1.9 得

$$\|(Bu)(t) - (Bv)(t)\|_\alpha \leqslant C_1 \int_0^t (t-s)^{-\alpha}\|u(s) - v(s)\|_\alpha \mathrm{d}s. \tag{7.14}$$

因此 $\|B^j u - B^j v\|_\alpha \leqslant K^j\|u - v\|_\alpha$, 其中 K 由 (7.12) 式给出, 与之对应的 $h(s) = C_1 s^{-\alpha}$, $q = \infty$. 由引理 7.4.1 知, 存在充分大的 n, 使得 $\|K^n\| < 1/2$. 于是有

$$\|(B^n u)(\cdot) - (B^n v)(\cdot)\|_Y \leqslant \frac{1}{2}\|u(\cdot) - v(\cdot)\|_Y.$$

由压缩映像原理 (定理 2.1.3) 推知, 存在唯一的 $u \in Y$, 使得 $Bu = u$.

取 $x, y \in X^\alpha$, 并记 $u = G(x)$, $v = G(y)$, 则有

$$\|u(t) - v(t)\|_\alpha \leqslant C_2\|x - y\|_\alpha + C_1 \int_0^t (t-s)^{-\alpha}\|u(s) - v(s)\|_\alpha \mathrm{d}s.$$

由 Gronwall 引理 (定理 7.4.2) 知, (7.13) 式成立.

§7.5 主 要 结 论

本节总假定

(1) A 是 Banach 空间 X 中的扇形算子, 且 $\mathrm{Re}\,\lambda > a$ 对所有 $\lambda \in \sigma(A)$ 成立;

(2) $\alpha \in [0,1)$, $\mathcal{O} \subset X^\alpha$ 是非空开集;

(3) $\nu \in (0,1]$, $T_0 \in (0,\infty]$, $F : [0,T_0) \times \mathcal{O} \to X$ 满足: 对于 $t \in [0,T_0)$ 和 $x \in \mathcal{O}$, 存在正常数 $L = L(t,x)$ 和 $\delta = \delta(t,x)$, 使得当 $t_i \in [0,T_0)$, $x_i \in \mathcal{O}$ 且 $|t_i - t| < \delta$, $\|x_i - x\|_\alpha < \delta (i = 1,2)$ 时, 有

$$\|F(t_2,x_2) - F(t_1,x_1)\| \leqslant L(|t_2 - t_1|^\nu + \|x_2 - x_1\|_\alpha). \tag{7.15}$$

对 $T \in (0,T_0]$, 记 $\mathcal{S}(T)$ 是所有满足

$$u'(t) \text{ 存在}, \ u(t) \in D(A) \text{ 且 } u'(t) + Au(t) = F(t,u(t)), \qquad \forall t \in (0,T) \tag{7.16}$$

的函数 $u \in C([0,T), \mathcal{O})$ 的全体. 需要强调的是, $F(t,u(t))$ 有可能依赖于 u 的导数. 一个典型的表达式就是 $F(t,u(t)) = f(t,u(t), \nabla u)$. 我们称这类方程为 **拟线性抛物型方程** .

注意到当 $u \in \mathcal{S}(T)$ 时, $u(t) \in \mathcal{O}$ 且关于 t 连续, 因而 $u(t) \in X^\alpha$, 关于 t 也连续. 在应用中, 通常可以在某个区间上选取 α. 我们将证明, 初值问题的解不依赖于 α 的选取. 此外, 我们要求 $u(0) \in \mathcal{O}$. 因此, 本节所研究的解不包括那些初值很 "坏" 的解 (尽管它们可能存在) . 虽然定义集合 $\mathcal{S}(T)$ 的方法有多种, 然而, 需要注意的是, 定义集合 $\mathcal{S}(T)$ 之后, 必须保证对于任意给定的初值, 解的唯一性都成立.

定理 7.5.1 设 $T \in (0,T_0]$, 则 $u \in \mathcal{S}(T)$ 当且仅当 $u \in C([0,T), \mathcal{O})$, 并且满足.

$$u(t) = \mathrm{e}^{-At}u(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{-A(t-s)}F(s,u(s))\mathrm{d}s, \qquad \forall t \in [0,T). \tag{7.17}$$

此外, 如果 $u \in \mathcal{S}(T)$, 那么以下结论成立:

(1) u', Au, $F(\cdot, u) : (0,T) \to X$ 局部 Hölder 连续. 同时, 若 (7.15) 式中的 ν 满足 $\nu \geqslant 1 - \alpha$, 则对任意 $\eta \in [0, 1-\alpha)$, 函数 $u : (0,T) \to X^\eta$ 可微, 并且导函数 $u' : (0,T) \to X^\eta$ 局部 Hölder 连续;

(2) 若 $\gamma \in [\alpha, 1]$, $u(0) \in X^\gamma$, 则 $u \in C([0,T), X^\gamma)$.

证明 假设 $u \in C([0,T), \mathcal{O})$. 记 $f(t) = F(t,u(t))$, 则 $f \in C([0,T), X)$. 于是由定理 3.5.1 知, 如果 $u \in \mathcal{S}(T)$, 那么 (7.17) 式成立.

现在假设 $u \in C([0,T), \mathcal{O})$ 且 (7.17) 式成立. 把 (7.17) 式改写成

$$u(t) = \mathrm{e}^{-At}u(0) + g(t), \text{ 其中 } g(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-A(t-s)}f(s)\mathrm{d}s. \tag{7.18}$$

选取 $0 < a < b < T$. 因为 $f \in C([0,T), X)$, 所以由定理 7.3.1 推知

$$g \in C^{1-\beta}([a,b], X^\beta), \qquad \forall \beta \in (0,1). \tag{7.19}$$

另一方面，由定理 7.1.10 知，对于 $a \leqslant s \leqslant t \leqslant b$ 和 $\beta \in (0,1)$, 均有

$$\|e^{-At}u(0) - e^{-As}u(0)\|_\beta \leqslant C(t-s)^{1-\beta}.$$

联立上式与 (7.18) 式及 (7.19) 式就推出，$u \in C^{1-\beta}([a,b], X^\beta)$. 于是由 F 的正则性知，函数 f 在 $[a,b]$ 上局部 Hölder 连续. 从而存在 $\tau \in (0,1)$, 使得 $f \in C^\tau([a,b], X)$. 如果 (7.15) 式中的 $\nu \geqslant 1-\alpha$, 那么对任意满足 $\tau \leqslant 1-\alpha$ 的 $\tau \in (0,1)$, 均有 $f \in C^\tau([a,b], X)$. 令

$$\begin{aligned} w(t) &= e^{-At}u(a), \\ v(t) &= w(t) + \int_0^t e^{-A(t-s)} f(a+s) ds, \qquad t \in [0, b-a]. \end{aligned}$$

则 $w'(t)$ 存在，$w(t) \in D(A)$ 并且 $w'(t) + Aw(t) = 0$(因为 e^{-At} 是实解析半群)．由于对任意 $0 < \beta < 1$, 均有 $u(a) \in X^\beta$, 因此若取 $0 < \beta \leqslant \tau$, 则由定理 7.3.3 知，对于 $0 < \varepsilon < b-a$ 和 $\eta \in [0,\tau)$ 有

$$Aw \in C^\tau([\varepsilon, b-a], X) \cap C^{\tau-\eta}([\varepsilon, b-a], X^\eta).$$

再由定理 7.3.3 知，$v'(t)$ 存在，$v(t) \in D(A)$, 并且

$$v'(t) + Av(t) = f(a+t), \qquad \forall\, t \in (0, b-a).$$

同时还有

$$Av \in C^\tau([\varepsilon, b-a], X), \quad v' \in C^{\tau-\eta}([\varepsilon, b-a], X^\eta), \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, b-a),\ \eta \in [0,\tau).$$

重新整理 (7.17) 式易知，$v(t) = u(t+a)$. 由 a, b 的任意性推出，$u \in \mathcal{S}(T)$ 并且结论 (1) 成立.

当 $\gamma \in (\alpha, 1)$ 时，由 (7.18) 式和 (7.19) 式以及 $e^{-At}u(0) \in C((0,T), X^\gamma)$ 推知，结论 (2) 成立.

当 $\gamma = 1$ 时，$e^{-At}u(0) \in C^{1-\alpha}([0,b], X^\alpha)$ (参见定理 7.1.10). 利用 (7.18) 式和 (7.19) 式推知，存在 $\beta \in (0,1)$, 使得 $u \in C^\beta([0,b], X^\alpha)$. 因此存在 $\tau \in (0,1)$, 使得 $f \in C^\tau([0,b], X)$. 从而由定理 7.3.3 知，$Au \in C([0,b], X)$. 再由 $u \in \mathcal{S}(T)$ 和 b 的任意性知，$u \in C([0,T), X)$. 这说明当 $\gamma = 1$ 时，结论 (2) 也成立.

下面证明，4.2 节的结论可用于拟线性抛物型方程.

引理 7.5.2 设 $T \in (0, T_0)$, $w \in C([0,T], \mathcal{O})$. 则存在正常数 δ, L 和连续函数 $H: [0,T] \times X^\alpha \to X$, 使得

(1) 若 $t\in[0,T]$, $\|z-w(t)\|_\alpha<\delta$, 则 $z\in\mathcal{O}$, $H(t,z)=F(t,z)$;

(2) $\|H(t,x)-H(t,y)\|\leqslant L\|x-y\|_\alpha$ 对所有 $t\in[0,T]$ 和 $x,y\in X^\alpha$ 成立.

证明 对于 $t\in[0,T]$, 取 $\delta(t)=\delta(t,w(t))>0$ 和 $L(t)=L(t,w(t))<\infty$, 使得当 $\|x-w(t)\|_\alpha<\delta(t)$, $\|y-w(t)\|_\alpha<\delta(t)$ 且 $|s-t|<\delta(t)$ 时，有

$$x,y\in\mathcal{O},\qquad \|F(s,x)-F(s,y)\|\leqslant L(t)\|x-y\|_\alpha.$$

取 $\mu(t)\in(0,\,\delta(t))$, 使得当 $|s-t|<\mu(t)$ 时， $\|w(s)-w(t)\|_\alpha<\delta(t)/2$ 成立. 于是存在 $\{t_i\}_{i=1}^n\subset[0,T]$, 使得

$$[0,T]\subset B_{\mu(t_1)}(t_1)\cup\cdots\cup B_{\mu(t_n)}(t_n).$$

记 $L=2\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}L(t_i)$, $\delta=\dfrac{1}{4}\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\delta(t_i)$. 易知，若 $t\in[0,T]$ 且 $x,y\in B_{2\delta}(w(t))$, 则 $x,y\in\mathcal{O}$, 并且 $\|F(t,x)-F(t,y)\|\leqslant\dfrac{1}{2}L\|x-y\|_\alpha$.

对于 $t\in[0,T]$ 以及 $x\in X^\alpha$, 定义 $H(t,x)=F(t,\,w(t)+R_\delta(x-w(t)))$, 其中 R_δ 是 X^α 中的保核收缩映射 (参见引理 4.1.4) , 则结论成立.

定理 7.5.3 (解的局部存在性) 若 $u_0\in\mathcal{O}$, 则存在 $\theta\in(0,T_0)$ 和 $u\in\mathcal{S}(\theta)$, 使得 $u(0)=u_0$. 进一步还有， $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant\theta}\|u_n(t)-u(t)\|_\alpha=0$, 其中 $u_n\in C([0,\,\theta),\,\mathcal{O})$ 的定义为

$$\begin{aligned}&u_1(t)=u_0,\\&u_{n+1}(t)=\mathrm{e}^{-At}u_0+\int_0^t\mathrm{e}^{-A(t-s)}F(s,u_n(s))\mathrm{d}s,\qquad t\in[0,\,\theta),\ n=1,\,2,\,\cdots.\end{aligned}$$

证明 选取 $T\in(0,T_0)$, 记 $w(t)=u_0$, $t\in[0,T]$. 设 δ 和 H 由引理 7.5.2 给出, $u\in C([0,T],\,X^\alpha)$ 是由定理 7.4.3 所确定的解. 因为 u 连续，所以存在 $\theta\in(0,T]$, 使得在 $[0,\,\theta]$ 上， $\|u(t)-w(t)\|_\alpha<\delta/2$. 因此， $H(t,u(t))=F(t,u(t))$. 从而由定理 7.5.1 推出， $u\in\mathcal{S}(\theta)$. (7.14) 式说明，当 θ 充分小时， B 是压缩映射. 进而推出，在 $[0,\,\theta]$ 上，有

$$\|u_2-u\|_\alpha=\|Bu_1-Bu\|_\alpha=\|Bw-Bu\|_\alpha<\|w-u\|_\alpha<\delta/2\implies\|u_2-w\|_\alpha<\delta,$$

$$\|u_3-u\|_\alpha=\|Bu_2-Bu\|_\alpha<\|u_2-u\|_\alpha<\delta/2\implies\|u_3-w\|_\alpha<\delta,$$

$$\|u_n-u\|_\alpha=\|Bu_{n-1}-Bu\|_\alpha<\|u_{n-1}-u\|_\alpha<\delta/2\implies\|u_n-w\|_\alpha<\delta.$$

所以当 $n\to\infty$ 时，在 X^α 上 $u_n\to u$.

定理 7.5.4 (解的唯一性) 设 $0 < \mu \leqslant \theta \leqslant T_0$. 若 $w \in \mathcal{S}(\mu)$, $u \in \mathcal{S}(\theta)$ 且 $w(0) = u(0)$, 则在 $[0, \mu)$ 上 $w(t) = u(t)$.

证明 任取 $T \in (0,\mu)$, 设 δ 和 H 由引理 7.5.2 确定. 定义

$$T' = \sup\big\{\tau : \tau < T \text{ 且 } \|u(t) - w(t)\|_\alpha < \delta, \forall\, t \in [0,\tau)\big\},$$

则 $T' > 0$. 因为对 $t \in [0,T')$, 有 $H(t,u(t)) = F(t,u(t))$, $H(t,w(t)) = F(t,w(t))$, 所以由定理 7.5.1 和定理 7.4.3 知, 在 $[0,T')$ 上 $u(t) = w(t)$. 利用 $u-w$ 的连续性以及 T' 的最大性可推出, $T' = T$.

定理 7.5.5 (解关于初值的连续依赖性) 设 $0 < T < \mu \leqslant T_0$, $w \in \mathcal{S}(\mu)$. 则存在正常数 ε 和 C, 使得对于满足 $\|x - w(0)\|_\alpha < \varepsilon$ 的任意 $x \in X^\alpha$, 存在 $u \in \mathcal{S}(T)$ 满足 $u(0) = x$, 且有

$$\|u(t) - w(t)\|_\alpha \leqslant C\|x - w(0)\|_\alpha, \qquad \forall\, t \in [0,T). \tag{7.20}$$

证明 设 δ 和 H 由引理 7.5.2 确定, C 由 (7.13) 式确定. 选取 $\varepsilon \in (0, \delta/C)$, 并假设 $\|x - w(0)\|_\alpha < \varepsilon$. 令 $u = G(x)$, 其中 G 由定理 7.4.3 给出. 由 (7.13) 式以及 $w = G(w(0))$ 知, (7.20) 式成立. 因为 $C\varepsilon < \delta$, 所以由引理 7.5.2 推出, 在 $[0,T]$ 上 $H(t,u(t)) = F(t,u(t))$. 再由定理 7.5.1 知, $u \in \mathcal{S}(T)$.

定理 7.5.6 (极大定义解) 设 $u_0 \in \mathcal{O}$, 则存在 $\tau_0 := \tau_0(u_0) \in (0,T_0]$ 和 $u \in \mathcal{S}(\tau_0)$, 使得 $u(0) = u_0$, 并且 u 满足: 对任意 $\mu \in (0,T_0]$, 若存在 $v \in \mathcal{S}(\mu)$ 使得 $v(0) = u_0$, 则 $\tau_0 \geqslant \mu$. 此外, 如果 $\tau_0 < T_0$, 那么或者 $\sup\limits_{0<t<\tau_0} \|F(t,u(t))\| = \infty$, 或者存在 $x \in \bar{\mathcal{O}} \setminus \mathcal{O}$, 使得 $\lim\limits_{t\to\tau_0} \|u(t) - x\|_\alpha = 0$.

证明 由定理 7.5.3 和定理 7.5.4 可推出前一部分结论. 下证后一部分结论. 假定 $\tau_0 < T_0$ 并且 $\sup\limits_{0<t<\tau_0} \|F(t,u(t))\| < \infty$. 利用 (7.17) 式和定理 7.3.1 知, 存在 $x \in X^\alpha$, 使得 $\lim\limits_{t\to\tau_0} \|u(t) - x\|_\alpha = 0$. 显然, $x \in \bar{\mathcal{O}}$. 假设 $x \in \mathcal{O}$. 取 $\tau' \in (\tau_0, T_0)$, 在 $[\tau_0, \tau']$ 上定义 $u(t) \equiv x$. 用 τ' 和 $u \in C([0,\tau'], \mathcal{O})$ 分别代替引理 7.5.2 中的 T 和 w, 从而可以确定出与之对应的 δ 和 H. 因此由定理 7.4.3 知, 存在 $v \in C([0,\tau'], X)$, 使得

$$v(t) = \mathrm{e}^{-At}u(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{-A(t-s)}H(s,\, v(s))\mathrm{d}s, \qquad t \in [0,\tau'].$$

再由解的唯一性知, 在 $[0,\tau_0)$ 上 $v(t) = u(t)$. 根据 $v-u$ 的连续性知, 存在 $\mu \in (\tau_0,\, \tau']$, 使得在 $[0,\, \mu]$ 上, $\|v(t) - u(t)\|_\alpha < \delta$. 因此, 在 $[0,\, \mu]$ 上 $H(t,v(t)) = F(t,v(t))$. 再利用定理 7.5.1 知, $v \in \mathcal{S}(\mu)$. 这与 τ_0 的最大性矛盾.

定理 7.5.7 (解的稳定性) 设 $a>0, T_0=\infty$. 若对任意 $\varepsilon>0$, 均存在 $\delta>0$, 使得对于任意满足 $\|x\|_\alpha<\delta$ 的 $x\in X^\alpha$ 以及 $t\geqslant 0$, 都有

$$x\in\mathcal{O},\qquad \|F(t,x)\|\leqslant\varepsilon\|x\|_\alpha.$$

则存在正常数 μ 和 C, 使得对每一个满足 $\|x\|_\alpha<\mu$ 的 $x\in X^\alpha$, 都存在 $u\in\mathcal{S}(\infty)$, 满足 $u(0)=x$ 和

$$\|u(t)\|_\alpha\leqslant C\,\|x\|_\alpha\,\mathrm{e}^{-at},\qquad\forall\, t\geqslant 0.$$

证明 由定理 7.1.9 知，存在 $M,\theta>0$, 使得

$$\|\mathrm{e}^{-At}\|\leqslant M\mathrm{e}^{-(a+\theta)t},\ \ \|(A-a)^\alpha\mathrm{e}^{-At}\|\leqslant Mt^{-\alpha}\mathrm{e}^{-(a+\theta)t},\qquad\forall\, t>0.$$

取 $\varepsilon>0$ 使得 $\varepsilon M\theta^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)<1$, 则存在一个与之对应的 $\delta>0$. 令 $\mu\in(0,\delta)$ 满足

$$2M\mu<\delta\{1-\varepsilon M\theta^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\}.\tag{7.21}$$

选取满足 $\|x\|_\alpha<\mu$ 的 $x\in X^\alpha$, 则存在最大的 $\tau_0>0$ 以及 $u\in\mathcal{S}(\tau_0)$, 使得 $u(0)=x$ (定理 7.5.6). 由连续性知，存在 $\eta\in(0,\tau_0]$, 使得当 $0\leqslant t<\eta$ 时， $\|u(t)\|_\alpha<\delta$. 令 τ' 是这些 η 中的最大者. 利用 $F(t,x)$ 的假设条件易知， $F(t,0)=0$. 这样就推出，对任意 $t\in[0,\tau')$, 有

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_\alpha&\leqslant M\mathrm{e}^{-(a+\theta)t}\|x\|_\alpha+\varepsilon M\int_0^t(t-s)^{-\alpha}\mathrm{e}^{-(a+\theta)(t-s)}\|u(s)\|_\alpha\mathrm{d}s,\\ \mathrm{e}^{at}\|u(t)\|_\alpha&\leqslant M\|x\|_\alpha+\varepsilon M\int_0^t(t-s)^{-\alpha}\mathrm{e}^{-\theta(t-s)}\mathrm{e}^{as}\|u(s)\|_\alpha\mathrm{d}s\\ &\leqslant M\|x\|_\alpha+\varepsilon M\theta^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\{\mathrm{e}^{as}\|u(s)\|_\alpha\}.\end{aligned}$$

于是

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\{\mathrm{e}^{as}\|u(s)\|_\alpha\}\leqslant\frac{M\|x\|_\alpha}{1-\varepsilon M\theta^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)}.$$

从而

$$\|u(t)\|_\alpha\leqslant\frac{M\mathrm{e}^{-at}\|x\|_\alpha}{1-\varepsilon M\theta^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)}.$$

由于 $\|x\|_\alpha<\mu$, 因此联立上述估计式与 (7.21) 式就推出， $\|u(t)\|_\alpha<\delta/2$ 在 $[0,\tau')$ 上成立. 再利用 u 的连续性和 τ' 的定义知， $\tau'=\tau_0$. 这说明 u 远离 $\mathcal{O}$ 的边界. 故由定理 7.5.6 知， $\tau_0=\infty$.

如果 A 的谱包含一个具有负实部的点 (这个点不一定是孤立的)，且 F 在 0 点处确实是非线性的，那么就可以得到下面的非稳定性结论.

定理 7.5.8 (解的非稳定性) 假设存在 $z \in \sigma(A)$ 满足 $\mathrm{Re}\, z < 0$, $\tau_0 = \infty$. 若存在 δ, θ, $M > 0$, 使得当 $u \in X^\alpha$ 且 $\|u\|_\alpha < \delta$ 时，有

$$u \in \mathcal{O} \ \text{且} \ \|F(t,u)\| \leqslant M\|u\|_\alpha^{1+\theta}, \qquad \forall\, t \geqslant 0. \tag{7.22}$$

则存在 $c > 0$, 使得对任意 $\varepsilon > 0$, 均存在 $u \in \mathcal{S}(\tau_0)$ 满足

$$u(0) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n), \quad \|u(0)\|_\alpha < \varepsilon,$$

并且对某个 $t \in (0, \tau_0)$, 有

$$\|u(t)\|_\alpha > c.$$

证明 定义 $z_0 = -\inf\limits_{\xi \in \sigma(A)} \mathrm{Re}\,\xi > 0$. 选取 λ 和 μ 满足

$$0 < \mu < z_0 < \lambda, \qquad \mu(1+\theta) > \lambda.$$

由定理 7.1.9 知

$$\|(A-a)^\alpha \mathrm{e}^{-At}\| \leqslant M_1 t^{-\alpha} \mathrm{e}^{\lambda t}, \qquad \forall\, t > 0. \tag{7.23}$$

根据 μ 的选取，存在 $\xi \in \sigma(A)$, 使得 $\mathrm{Re}\,\xi < -\mu$. 所以由推论 3.2.3 知，存在 $x_1 \in X$, 使得 $\sup\limits_{t>0} \|\mathrm{e}^{-At} x_1\|_\alpha \mathrm{e}^{-\mu t} = \infty$. 定义

$$x_2 = (A-a)^{-\alpha} \mathrm{e}^{-A} x_1, \qquad x = \|x_2\|_\alpha^{-1} x_2 \in \textstyle\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n),$$

$$a(t) = \|\mathrm{e}^{-At} x\|_\alpha\, \mathrm{e}^{-\mu t}, \qquad b(t) = \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} a(s).$$

第一个式子的合理性由定理 3.3.12 保证. 则 $a(t)$ 连续， $\sup\limits_{t>0} a(t) = \infty$, $a(0) = 1$ 且 $\|\mathrm{e}^{-At} x\|_\alpha = a(t) \mathrm{e}^{\mu t}$. 取 $c \in (0, \delta/3)$, 使得

$$M_2 := 3MM_1 (3c)^\theta \Gamma(1-\alpha) [\mu(1+\theta) - \lambda]^{\alpha - 1} < 1. \tag{7.24}$$

对给定的 $\varepsilon > 0$, 取 $t_0 > 0$ 满足 $\varepsilon a(t_0) \mathrm{e}^{\mu t_0} > 2c$. 记 $t_1 > 0$ 是满足 $a(t_1) = 1 + b(t_0)$ 的最小者. 则

$$t_1 > t_0, \quad a(t_1) = b(t_1), \quad \text{且} \ a(t) < a(t_1), \qquad \forall t \in [0, t_1).$$

选取 $\varepsilon_0 > 0$, 满足 $\varepsilon_0 a(t_1) \mathrm{e}^{\mu t_1} = 2c$, 则 $\varepsilon_0 < \varepsilon$ 且 $\varepsilon_0 < 2c < 2\delta/3$.

由定理 7.5.6 知，存在最大的时间 τ_0 以及 $u \in \mathcal{S}(\tau_0)$ 满足 $u(0) = \varepsilon_0 x$. 注意到 $\|u(0)\|_\alpha = \varepsilon_0 < \varepsilon$, 因此根据解关于初值的连续性可推出，存在 $\tau^* \in (0, \tau_0)$, 使得

$$\|u(t)\|_\alpha \leqslant \frac{3}{2} \varepsilon_0 b(t) \mathrm{e}^{\mu t}, \qquad \forall\, t \in [0, \tau^*].$$

设 τ_1 是这些 τ^* 中的最大者. 因为对所有 $t\in[0,\tau_1)\cap[0,t_1]$, 有

$$\|u(t)\|_\alpha\leqslant\frac{3}{2}\varepsilon_0b(t)\mathrm{e}^{\mu t}\leqslant\frac{3}{2}\varepsilon_0b(t_1)\mathrm{e}^{\mu t_1}=\frac{3}{2}\varepsilon_0a(t_1)\mathrm{e}^{\mu t_1}=3c<\delta,\tag{7.25}$$

所以由 (7.22) 式和 (7.23) 式知

$$\begin{aligned}&\Big\|\int_0^t\mathrm{e}^{-A(t-s)}F(s,u(s))\mathrm{d}s\Big\|_\alpha\\&\leqslant MM_1\int_0^t(t-s)^{-\alpha}\mathrm{e}^{\lambda(t-s)}\|u(s)\|_\alpha^{1+\theta}\mathrm{d}s\\&\leqslant MM_1\int_0^t(t-s)^{-\alpha}\mathrm{e}^{\lambda(t-s)}\Big(\frac{3}{2}\varepsilon_0b(s)\mathrm{e}^{\mu s}\Big)^{1+\theta}\mathrm{d}s\\&\leqslant MM_1\Big(\frac{3}{2}\,\varepsilon_0b(t)\Big)^{1+\theta}\int_0^t(t-s)^{-\alpha}\mathrm{e}^{\lambda(t-s)}\mathrm{e}^{\mu(1+\theta)s}\mathrm{d}s\\&\leqslant MM_1\Big(\frac{3}{2}\,\varepsilon_0b(t)\mathrm{e}^{\mu t}\Big)^{1+\theta}\Gamma(1-\alpha)(\mu(1+\theta)-\lambda)^{\alpha-1}\\&\leqslant\frac{3}{2}\varepsilon_0MM_1b(t)\mathrm{e}^{\mu t}(3c)^\theta\Gamma(1-\alpha)(\mu(1+\theta)-\lambda)^{\alpha-1}\\&=\frac{1}{2}\varepsilon_0M_2b(t)\mathrm{e}^{\mu t},\quad\forall\,t\in[0,\tau_1)\cap[0,t_1].\end{aligned}\tag{7.26}$$

由于

$$\|\mathrm{e}^{-At}u(0)\|_\alpha=\|\varepsilon_0\mathrm{e}^{-At}x\|_\alpha=\varepsilon_0a(t)\mathrm{e}^{\mu t}\leqslant\varepsilon_0b(t)\mathrm{e}^{\mu t},$$

因此由 (7.17) 式推知

$$\|u(t)\|_\alpha\leqslant(1+M_2/2)\varepsilon_0b(t)\mathrm{e}^{\mu t},\qquad\forall\,t\in[0,\tau_1)\cap[0,t_1].\tag{7.27}$$

假设 $\tau_0\leqslant t_1$. 那么利用解的连续性并注意到 $M_2<1$ 以及 τ_1 的定义, 我们有 $\tau_1=\tau_0$. 另一方面, 由 (7.25) 式和 (7.22) 式推知, F 在 $[0,\tau_0)$ 上有界, 并且 u 远离 $\mathcal{O}$ 的边界. 这与定理 7.5.6 的结论矛盾. 因此, $\tau_0>t_1$. 从而由 (7.27) 式和 τ_1 的定义推出, $\tau_1>t_1$. 由构造过程知, $\|\mathrm{e}^{-At_1}u(0)\|_\alpha=2c$. 再由 (7.17) 式和 (7.26) 式得

$$2c<\|u(t_1)\|_\alpha+\frac{1}{2}\varepsilon_0b(t_1)\mathrm{e}^{\mu t_1}=\|u(t_1)\|_\alpha+c.$$

故 $\|u(t_1)\|_\alpha>c$.

§7.6 正 则 性

本节假设 A 是 Banach 空间 X 中的扇形算子. 在 7.5 节中, 我们讨论了问题 (7.16) 的解关于初值的连续依赖性以及解的导数关于时间 t 的 Hölder 连续性 (参见定理 7.5.1 和定理 7.5.5). 本节进一步讨论问题 (7.16) 的解的性质.

7.6.1 紧性结果

定理 7.6.1 设 $0 \leqslant \alpha < 1$, A^{-1} 存在且是紧的，并且对于任意有界闭集 $\mathcal{B} \subset X^\alpha\,(0 \leqslant \alpha < 1)$, 集合 $F(\mathbb{R}^+ \times \mathcal{B})$ 在 X 中有界. 假定 $u(t;t_0,u_0)$ 是问题

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = F(t,u(t)), & t > t_0, \\ u(t_0) = u_0 \in X^\alpha \end{cases} \tag{7.28}$$

的唯一解. 如果 t 的函数 $\|u(t;t_0,u_0)\|_\alpha$ 在 (t_0,∞) 内有界, 那么集合 $\{u(t;t_0,u_0)\}_{t>t_0}$ 在 X^α 中是紧的.

证明 不失一般性，假设存在 $\delta > 0$, 使得 $\mathrm{Re}\,\lambda > \delta$ 对所有 $\lambda \in \sigma(A)$ 成立. 因为算子 A^{-1} 是紧的，所以对任意 $0 \leqslant \alpha < \beta < 1$, 算子 $A^{\alpha-\beta} = A^{-(\beta-\alpha)}$ 是紧的 (其证明留作习题). 利用 $A^\alpha = A^{\alpha-\beta}A^\beta$ 可推出， $X^\beta \subset X^\alpha$, 并且此包含关系是紧的. 为了证明所需的结论，只需证明集合 $\{\|u(t;t_0,u_0)\|_\beta\}_{t\geqslant t_0+1}$ 有界.

事实上，由假设条件知，存在正常数 C, 使得

$$\|F(t,u(t;t_0,u_0))\| \leqslant C, \qquad \forall\, t \geqslant t_0.$$

于是由定理 7.5.1 和定理 7.1.9 知，对任意 $t \geqslant t_0 + 1$, 有

$$\begin{aligned} \|u(t;t_0,u_0)\|_\beta &\leqslant \|A^{\beta-\alpha}\mathrm{e}^{-(t-t_0)A}\| \cdot \|u_0\|_\alpha + \int_{t_0}^t \|A^\beta \mathrm{e}^{-(t-s)A}\| \cdot \|F(s,u(s))\|\mathrm{d}s \\ &\leqslant C(t-t_0)^{-(\beta-\alpha)}\mathrm{e}^{-\delta(t-t_0)}\|u_0\|_\alpha + C\int_{t_0}^t (t-s)^{-\beta}\mathrm{e}^{-\delta(t-s)}\mathrm{d}s \\ &\leqslant M. \end{aligned}$$

定理得证.

注 7.6.1 若存在 $a \in \mathbb{R}$, 使得 $\mathrm{Re}\,\lambda > a$ 对任意 $\lambda \in \sigma(A)$ 成立，则有 $\mathrm{Re}\,\sigma(A-a) > 0$. 令 $\hat{F}(t,u) = F(t,u) - au$, 并用下面的问题替代问题 (7.28)：

$$\begin{cases} u'(t) + (A-a)u(t) = \hat{F}(t,u(t)), & t > t_0, \\ u(0) = u_0 \in X^\alpha. \end{cases}$$

注意到 $\|au\| = \|A^{-\alpha}A^\alpha au\| \leqslant M\|au\|_\alpha$, 于是易知， $\hat{F}$ 与 F 具有相同的性质. 因此，我们可以得到与定理 7.6.1 完全相同的结论.

7.6.2 解关于参数的连续依赖性和可微性

考察下面的抽象初值问题:

$$\begin{cases} u'(t) + \mu_n A u = F_n(t, u), \quad t > t_0, \quad n = 1, 2, \cdots, \\ u(t_0) = x_n \end{cases} \tag{7.29}$$

和

$$\begin{cases} u'(t) + \mu_0 A u = F_0(t, u), \quad t > t_0, \\ u(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{7.30}$$

记 $u_n(t)$ 和 $u_0(t)$ 分别是上述问题的解. 假设当 $n \to \infty$ 时, 有

$$F_n(t, u) \to F_0(t, u), \quad \mu_n \to \mu_0, \quad x_n \to x_0.$$

我们想知道, 当 $n \to \infty$ 时, 是否有 $u_n(t) \to u_0(t)$?

定理 7.6.2 假设

(1) $0 \leqslant \alpha < 1, \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$ 是开集. $F_n(t, u) : \mathcal{U} \to X$, 并且 $F_n \, (n = 0, 1, 2, \cdots)$ 关于 u 局部 Lipschitz 连续, 关于 t 局部 Hölder 连续. 此外, 对任意 $(t, u) \in \mathcal{U}$, 在 (t, u) 的邻域内一致地有

$$\lim_{n \to \infty} F_n(t, u) = F_0(t, u).$$

(2) $(t_0, x_n) \in \mathcal{U}$, 并且当 $n \to \infty$ 时, $\|x_n - x_0\|_\alpha \to 0, \quad \mu_n \to \mu_0 > 0$.

(3) $u_0(t)$ 是问题 (7.30) 的极大定义解, 其存在区间为 $[t_0, t_0 + \tau_0)$.

则对任意 $t^* \in (t_0, t_0 + \tau_0)$, 当 $n \gg 1$ 时, 问题 (7.29) 的解 $u_n(t)$ 在 $[t_0, t^*]$ 上存在, 并且在 $[t_0, t_0 + \tau_0)$ 的紧子区间上一致地成立

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n(t) - u_0(t)\|_\alpha = 0.$$

证明 不失一般性, 假设 $t_0 = 0, x_0 = 0, \mu_0 = 1$ 且 $\dfrac{1}{2} < \mu_n < 2$. 进一步, 若令 $v_n(t) = u_n(t) - u_0(\mu_n t)$, 则问题 (7.29) 变为如下问题:

$$\begin{cases} v_n'(t) + \mu_n A v_n(t) = F_n(t, v_n(t) + u_0(\mu_n t)) - \mu_n F_0(\mu_n t, u_0(\mu_n t)) := \hat{F}_n(t, v_n), \\ v_n(0) = x_n - x_0 = x_n. \end{cases}$$

显然, 在 $[0, \tau_0)$ 在上, $\hat{F}_0(t, 0) = v_0(t) = 0$. 因此对于问题 (7.30), 还可以假设 $F_0(t, 0) = u_0(t) = 0$ 在 $[0, \tau_0)$ 在上成立.

注意到, 对任意 $t^* \in (0, \tau_0)$, $[0, t^*] \times \{0\}$ 是 $\mathcal{U}$ 的紧子集, 所以存在正常数 δ 和 L, 使得

$$\|F_0(t, u) - F_0(t, v)\| \leqslant L\|u - v\|_\alpha, \quad \forall\, 0 \leqslant t \leqslant t^*, \ \|u\|_\alpha, \|v\|_\alpha \leqslant \delta,$$

并且当 $n\to\infty$ 时，$\|F_n(t,u)-F_0(t,u)\|\to 0$ 关于 $0\leqslant t\leqslant t^*$ 和 $\|u(t)\|_\alpha\leqslant\delta$ 一致成立．由此推出，当 n 充分大时，对于 $0\leqslant t\leqslant t^*$ 和 $\|u(t)\|_\alpha\leqslant\delta$, $\|F_n(t,u)\|$ 有界.

现在证明，当 n 充分大时，$u_n(t)$ 在 $[0,t^*]$ 上存在．事实上，因为当 $n\to\infty$ 时，$\|u_n(0)\|_\alpha=\|x_n\|_\alpha\to 0$, 所以存在 $N_1\gg 1$, 使得当 $n\geqslant N_1$ 时，有 $\|u_n(0)\|_\alpha<\delta$. 定义

$$t_n=\sup\{t\in[0,t^*]:\ \|u_n(s)\|_\alpha<\delta,\qquad \forall\, 0\leqslant s\leqslant t\}>0,\quad n\geqslant N_1.$$

由定理 7.1.9 知

$$\begin{aligned}\|u_n(t_n)\|_\alpha\leqslant&\ \|\mathrm{e}^{-\mu_nAt_n}x_n\|_\alpha+\left\|\int_0^{t_n}\mathrm{e}^{-\mu_n(t_n-s)A}[F_n(s,u_n(s))-F_0(s,u_n(s))]\mathrm{d}s\right\|_\alpha\\&+\left\|\int_0^{t_n}\mathrm{e}^{-\mu_n(t_n-s)A}F_0(s,u_n(s))\mathrm{d}s\right\|_\alpha\\\leqslant&\ M\mathrm{e}^{-a\mu_nt_n}\|x_n\|_\alpha+CI_n\mu_n^{-\alpha}\int_0^{t_n}(t_n-s)^{-\alpha}\mathrm{e}^{-a\mu_n(t_n-s)}\mathrm{d}s\\&+LC\mu_n^{-\alpha}\int_0^{t_n}(t_n-s)^{-\alpha}\mathrm{e}^{-a\mu_n(t_n-s)}\|u_n(s)\|_\alpha\mathrm{d}s\\\leqslant&\ C_1(\|x_n\|_\alpha+I_n)+C_2\int_0^{t_n}(t_n-s)^{-\alpha}\|u_n(s)\|_\alpha\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中

$$I_n=\sup\{\|F_n(t,u)-F_0(t,u)\|:\ 0\leqslant t\leqslant t^*,\ \|u\|_\alpha\leqslant\delta\}.$$

利用 Gronwall 引理 (引理 4.1.1) 可得

$$\|u_n(t_n)\|_\alpha\leqslant C(\|x_n\|_\alpha+I_n),\qquad n\geqslant N_1,\tag{7.31}$$

其中常数 C 不依赖于 n. 因为 $\|x_n\|_\alpha\to 0$, 并且在 $[0,t^*]\times\{\|u\|_\alpha\leqslant\delta\}$ 上一致地有 $\|F_n(t,u)-F_0(t,u)\|\to 0$ (这也说明 $I_n\to 0$), 所以由 (7.31) 式知，存在 $N\geqslant N_1$, 使得 $\|u_n(t_n)\|_\alpha<\delta$ 对所有 $n\geqslant N$ 成立．根据 t_n 的定义可推出，$t_n=t^*$. 于是当 n 充分大时，在 $[0,t^*]$ 上 $u_n(t)$ 存在，并且一致地成立 $\|u_n(t)\|_\alpha\to 0$.

接下来阐述解关于初值和参数的可微性，结论的证明可参阅文献 [9](64 页的定理 3.4.4).

定理 7.6.3 设 $0\leqslant\alpha<1$, 开集 $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}\times X^\alpha$, Y 是 Banach 空间，且 $\Lambda\subset Y$ 是开集．进一步假定

(1) $F:\mathcal{U}\times\Lambda\to X$, 并且 F, D_uF 和 $D_\lambda F$ 都在 $\mathcal{U}\times\Lambda$ 中连续，F 关于 t 局部 Hölder 连续;

(2) 对于 $\mu > 0$, $\lambda \in \Lambda$, $(\tau, \xi) \in \mathcal{U}$, 记 $u(t) = u(t; \tau, \xi, \lambda, \mu)$ 是下述问题的极大定义解:

$$\begin{cases} u'(t) + \mu A u(t) = F(t, u, \lambda), \quad t > \tau, \\ u(\tau) = \xi. \end{cases}$$

则函数

$$(\xi, \lambda, \mu) \in X^\alpha \times \Lambda \times \mathbb{R}^+ \to u(t; \tau, \xi, \lambda, \mu) \in X^\alpha$$

是可微的，并且在 $u(t)$ 的存在区间上，其导函数

$$h(t) = D_\xi u(t), \quad v(t) = D_\lambda u(t), \quad w(t) = D_\mu u(t)$$

分别是以下问题的适度解:

$$\begin{cases} h'(t) + \mu A h = D_u F(t, u(t), \lambda) h, \quad t > \tau, \\ h(\tau) = I, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v'(t) + \mu A v = D_u F(t, u(t), \lambda) v + D_\lambda F(t, u(t), \lambda), \quad t > \tau, \\ v(\tau) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} w'(t) + \mu A w = D_u F(t, u(t), \lambda) w - A u(t), \quad t > \tau, \\ w(\tau) = 0. \end{cases}$$

此外, 若函数 $(t, u) \mapsto D_u F$ 和函数 $(t, u) \mapsto D_\lambda F$ 都在 $\mathcal{U}$ 中 Hölder 连续, 则 $h(t)$, $v(t)$ 和 $w(t)$ 都是古典解.

7.6.3 微分方程的光滑作用

在 7.5 节中我们看到, 对任意初值 $u_0 \in X^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, 问题 (7.16) 的解 $u(t) \in D(A) = X^1$. 本节将证明，如果初值 $u_0 \in X^\alpha$, 那么对任意 $0 < r < 1$, $u'(t) \in X^r$ 并且是 Hölder 连续的. 下面的定理改进了定理 7.5.1 的结论 (1) .

定理 7.6.4 设 $0 \leqslant \alpha < 1$, 开集 $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$, $F : \mathcal{U} \to X$ 局部 Lipschitz 连续. 假定 $(t_0, u_0) \in \mathcal{U}$, 并且 u 是问题 (7.16) 在 $[t_0, t_1]$ 上的解. 则对任意 $0 < r < 1$, 函数 $u'(t) : (t_0, t_1] \to X^r$ 局部 Hölder 连续.

证明 不失一般性，假设 $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ 对所有 $\lambda \in \sigma(A)$ 成立，即与算子 A 对应的 $a = 0$. 因为 $u(t)$ 满足

$$u(t) = \mathrm{e}^{-(t-t_0)A} u_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-(t-s)A} F(s, u(s)) \mathrm{d}s, \tag{7.32}$$

所以由定理 7.5.1 的证明知, $u \in C^{1-\beta}([a,b], X^{\beta})$ 对所有 $t_0 < a < b \leqslant t_1$ 和 $\beta \in (0,1)$ 成立. 特别地, 若取 $\beta = \alpha$, 并记 $f(s) = F(s, u(s))$, 则对任意 $t_0 < s < t \leqslant t_1$, f 满足

$$\begin{aligned}\|f(t) - f(s)\| &\leqslant L_0(|t-s| + \|u(t) - u(s)\|_\alpha) \\ &\leqslant L_0(|t-s| + L_1|t-s|^{1-\alpha}) \leqslant L|t-s|^{1-\alpha},\end{aligned} \tag{7.33}$$

这里的 L 依赖于 s 和 t. 如果 $t_0 < \tau < t < t+h \leqslant t_1$, 那么由 (7.32) 式得

$$\begin{aligned}u(t+h) - u(t) &= \{\mathrm{e}^{-(t+h-\tau)A} - \mathrm{e}^{-(t-\tau)A}\}u(\tau) \\ &\quad + \int_\tau^{t+h} \mathrm{e}^{-(t+h-s)A} f(s)\mathrm{d}s - \int_\tau^t \mathrm{e}^{-(t-s)A} f(s)\mathrm{d}s \\ &= (\mathrm{e}^{-hA} - I)\mathrm{e}^{-(t-\tau)A}u(\tau) + \int_\tau^{\tau+h} \mathrm{e}^{-(t+h-s)A} f(s)\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_\tau^t \mathrm{e}^{-(t-s)A}[f(s+h) - f(s)]\mathrm{d}s \\ &:= I_1 + I_2 + I_3.\end{aligned} \tag{7.34}$$

对任意 $\alpha < \beta < 1$, 利用定理 7.1.9 及 $(\mathrm{e}^{-hA} - I)u(\tau) = -\int_0^h A\mathrm{e}^{-sA}u(\tau)\mathrm{d}s$, 可推出

$$\begin{aligned}\|I_1\|_\alpha &\leqslant C_1 h\|A^{\alpha+1-\beta}\mathrm{e}^{-(t-\tau)A}A^\beta u(\tau)\| \leqslant C_2 h(t-\tau)^{\beta-1-\alpha}\|u(\tau)\|_\beta, \\ \|I_2\|_\alpha &\leqslant C_3 \int_\tau^{\tau+h} (t+h-s)^{-\alpha}\|f(s)\|\mathrm{d}s \leqslant C_4 h(t-\tau)^{-\alpha}, \\ \|I_3\|_\alpha &\leqslant C_5 \int_\tau^t (t-s)^{-\alpha}\|f(s+h) - f(s)\|\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

联立以上估计, 并利用 (7.33) 式和 (7.34) 式可得

$$\begin{aligned}\|f(t+h) - f(t)\| &\leqslant hL + hM_1[(t-\tau)^{\beta-1-\alpha}\|u(\tau)\|_\beta + (t-\tau)^{-\alpha}] \\ &\quad + M_1\int_\tau^t (t-s)^{-\alpha}\|f(s+h) - f(s)\|\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

从而由 Gronwall 引理 (定理 7.4.2) 知

$$\|f(t+h) - f(t)\| \leqslant hM_0[(t-\tau)^{\beta-1-\alpha}\|u(\tau)\|_\beta + (t-\tau)^{-\alpha}].$$

另一方面, 定理 7.3.3 说明, 对任意 $r < 1$, 函数 $v(t) := \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{-(t-s)A} f(s)\mathrm{d}s$ 满足 $v' \in C^{\mu-r}((t_0, t_1], X^r)$, 其中 $r < \mu < 1$. 类似于对 $\|I_1\|_\alpha$ 的估计, 可推出函数 $A\mathrm{e}^{-(t-t_0)A}x : (t_0, t_1] \to X^r$ 局部 Hölder 连续. 所以, 函数 $u'(t)$ 局部 Hölder 连续.

§7.7 抛物型方程的实例

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是有界区域，且具有光滑边界 $\partial\Omega$. 假定 $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$ 是连续的实值函数，

$$A(x,D)=-\sum_{i,j=1}^{3}\partial_{x_j}(a_{ij}(x)\partial_{x_i})$$

是强椭圆算子. 考察下面的拟线性抛物型方程:

$$\begin{cases} u_t+A(x,D)u=f(t,x,u,\nabla u), & x\in\Omega,\ t>0,\\ u(t,x)=0, & x\in\partial\Omega,\ t>0,\\ u(0,x)=u_0(x), & x\in\Omega. \end{cases} \tag{7.35}$$

本节总假设 $f(t,x,u,p)$ (其中 $p\in\mathbb{R}^3$) 关于所有变元都是 Lipschitz 连续的，且存在关于 r 单增的连续函数 $\rho(t,r):\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, 以及常数 $\sigma:1\leqslant\sigma<3$, 使得对任意 $t,t_1,t_2\in\mathbb{R}^+$, $x\in\bar\Omega$, $u,v\in\mathbb{R}$ 以及 $p,q\in\mathbb{R}^3$, 有

$$\begin{cases} |f(t,x,u,p)|\leqslant\rho(t,|u|)(1+|p|^\sigma),\\ |f(t,x,u,p)-f(t,x,u,q)|\leqslant\rho(t,|u|)(1+|p|^{\sigma-1}+|q|^{\sigma-1})|p-q|,\\ |f(t,x,u,p)-f(t,x,v,p)|\leqslant\rho(t,|u|+|v|)(1+|p|^\sigma)|u-v|,\\ |f(t_1,x,u,p)-f(t_2,x,u,p)|\leqslant\rho(t_1+t_2,|u|)(1+|p|^\sigma)|t_1-t_2|. \end{cases} \tag{7.36}$$

取 $X=L^2(\Omega)$, 并定义

$$Au=A(x,D)u,\quad D(A)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega).$$

则 $-A$ 是 $L^2(\Omega)$ 中某个解析半群的无穷小生成元, 且 $\operatorname{Re}\sigma(A)>0$. 令 $X^\alpha=D(A^\alpha)$, 其中 $0\leqslant\alpha\leqslant1$. 若

$$\max\{3/4,\ (5\sigma-3)/(4\sigma)\}<\alpha<1,\quad 0\leqslant\nu<(4\alpha-3)/2,$$

则有

$$X^\alpha\hookrightarrow W^{1,2\sigma}(\Omega)\cap C^\nu(\bar\Omega),$$

并且上述嵌入是连续的. 下面假设 $\alpha>3/4$.

把问题 (7.35) 改写成 X 中的抽象初值问题:

$$\begin{cases} u'(t)+Au(t)=F(t,u(t)), \quad t>0, \\ u(0)=u_0, \end{cases} \tag{7.37}$$

其中 $F(t,u(t))(x)=f(t,x,u(t,x),\nabla u(t,x))$.

引理 7.7.1 $F:\mathbb{R}^+\times X^\alpha\to X$, 并且具有以下性质:

(1) 对任意固定的 $t\geqslant 0$, F 把 X^α 中的有界集映成 X 中的有界集;

(2) F 局部 Lipschitz 连续.

证明 (1) 利用条件 (7.36) 和 Minkowski 不等式，可得

$$\|F(t,u)\|_2\leqslant C\rho(t,\|u\|_0)\big(|\Omega|^{1/2}+\|\nabla u\|_{2\sigma}^\sigma\big)\leqslant C\rho(t,\|u\|_0)\big(1+\|u\|_\alpha^\sigma\big), \quad \forall\, u\in X^\alpha,$$

其中 $\|\cdot\|_0=\|\cdot\|_\infty$. 这说明， $F:\mathbb{R}^+\times X^\alpha\to X$, 并且结论 (1) 成立.

(2) 设 $(t_1,u_1),(t_2,u_2)\in\mathbb{R}^+\times X^\alpha$. 由条件 (7.36) 知

$$\begin{aligned}
&|F(t_1,u_1)(x)-F(t_2,u_2)(x)|\\
\leqslant{}& |f(t_1,x,u_1,\nabla u_1)-f(t_2,x,u_1,\nabla u_1)|+|f(t_2,x,u_1,\nabla u_1)-f(t_2,x,u_2,\nabla u_1)|\\
&+|f(t_2,x,u_2,\nabla u_1)-f(t_2,x,u_2,\nabla u_2)|\\
\leqslant{}& \rho(t_1+t_2,\,|u_1|)(1+|\nabla u_1|^\sigma)|t_1-t_2|+\rho(t_2,\,|u_1|+|u_2|)(1+|\nabla u_1|^\sigma)|u_1-u_2|\\
&+\rho(t_2,|u_2|)(1+|\nabla u_1|^{\sigma-1}+|\nabla u_2|^{\sigma-1})|\nabla(u_1-u_2)|.
\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega(1+|\nabla u_1|^{2\sigma})|u_1-u_2|^2\mathrm{d}x\leqslant C_1(1+\|u_1\|_{1,2\sigma}^{2\sigma})\|u_1-u_2\|_0^2,\\
&\int_\Omega\big(1+|\nabla u_1|^{2\sigma-2}+|\nabla u_2|^{2\sigma-2}\big)|\nabla(u_1-u_2)|^2\mathrm{d}x\\
\leqslant{}& C_2\left(\int_\Omega|\nabla(u_1-u_2)|^{2\sigma}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\sigma}}\left\{\left(\int_\Omega|\nabla u_1|^{2\sigma}\mathrm{d}x\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+\left(\int_\Omega|\nabla u_2|^{2\sigma}\mathrm{d}x\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+1\right\},
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\|F(t_1,u_1)-F(t_2,u_2)\|_2\leqslant{}& C\rho(t_1+t_2,\,\|u_1\|_0)(1+\|u_1\|_{1,2\sigma}^\sigma)|t_1-t_2|\\
&+C\rho(t_2,\,\|u_1\|_0+\|u_2\|_0)(1+\|u_1\|_{1,2\sigma}^\sigma)\|u_1-u_2\|_0\\
&+C\rho(t_2,\|u_2\|_0)(1+\|u_1\|_{1,2\sigma}^{\sigma-1}+\|u_2\|_{1,2\sigma}^{\sigma-1})\|u_1-u_2\|_{1,2\sigma}\\
\leqslant{}& M(|t_1-t_2|+\|u_1-u_2\|_\alpha),
\end{aligned}$$

这里的常数 M 仅依赖于 $t_1, t_2, \|u_1\|_\alpha$ 和 $\|u_2\|_\alpha$. 由上式可知，结论 (2) 成立.

根据定理 7.5.6，对任意给定的 $u_0 \in X^\alpha$, 问题 (7.37) 有唯一极大定义解 $u \in \mathcal{S}(\tau_0)$, 满足：或者 $\tau_0 = \infty$, 或者 $\tau_0 < \infty$ 且 $\lim\limits_{t\to\tau_0^-} \|u(t)\| = \infty$.

接下来证明，这个极大定义解 $u(t,x)$ 是问题 (7.35) 的古典解. 事实上，对任意 $0 < t < \tau_0$, 因为 $u(t) \in D(A) \hookrightarrow C(\bar\Omega)$, 所以由定理 7.6.4 知，函数 $t \mapsto u_t \in X^\alpha$ 是局部 Hölder 连续的. 于是函数 $u(t,x)$ 和函数 $u_t(t,x)$ 在 $(0,\tau_0)\times\bar\Omega$ 上都是连续的. 由于对任意 $0 < t < \tau_0$, 有 $u(\cdot,t) \in D(A)$, 因此当 $q_1 = 2, p_1 = 6/(3-2) = 6$ 时，$\nabla u \in W^{1,q_1}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_1}(\Omega)$. 从而 $Au = F(t,u(t)) - u_t \in L^{p_1/\sigma}(\Omega)$. 这说明 $u(t) \in W^{2,6/\sigma}(\Omega)$ 且 $\nabla u \in W^{1,q_2}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_2}(\Omega)$, 其中 $q_2 = p_1/\sigma = 6/\sigma > 2, p_2 = 3q_2/(3-q_2)$. 重复上述分析过程，可以推出 $\nabla u \in W^{1,q_n}(\Omega)$, 这里的 q_n 满足 $1/q_n = \sigma(1/q_{n-1} - 1/3)$. 由 $1 \leqslant \sigma < 3$ 知，存在 $n \gg 1$, 使得 $q_n > 3$. 从而 $\nabla u \in W^{1,q_n}(\Omega) \hookrightarrow C^\nu(\bar\Omega)$. 这说明，$F(t,u(\cdot,t))$ 在 $\bar\Omega$ 上 Hölder 连续. 于是由 $\alpha > 3/4$ 和 $u_t(\cdot,t) \in X^\alpha \hookrightarrow C^\nu(\bar\Omega)$ 可推知，$Au = F(t,u) - u_t$ 在 $\bar\Omega$ 上也是 Hölder 连续的. 根据椭圆型方程的正则性理论，存在 $\delta > 0$, 使得 $u(\cdot,t) \in C^{2+\delta}(\Omega)$. 这表明，函数 $(t,x) \mapsto u(t,x)$ 关于 $t > 0$ 一次连续可微，关于 $x \in \Omega$ 二次连续可微. 所以，u 是古典解.

习 题 七

7.1 设 $-A$ 是 Banach 空间 X 上的 C_0 半群 $Q(t)$ 的无穷小生成元，$A \in \mathcal{B}(X), \lambda \in \mathbb{R}, \alpha \in [0,1), x \in D(A^\alpha)$. 证明

$$\lim_{t\to 0+} t^{-\alpha}\|x - \mathrm{e}^{\lambda t}Q(t)x\| = 0.$$

7.2 设 A, X 同上，$\alpha \geqslant 0$. 证明

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^\alpha (A+\lambda)^{-\alpha} x = x, \qquad \forall\, x \in X.$$

7.3 设 A, X 同上，$\alpha < \beta < \gamma$. 证明存在正常数 C, 使得

$$\|A^\beta x\| \leqslant C\|A^\gamma x\|^{(\beta-\alpha)/(\gamma-\alpha)}\|A^\alpha x\|^{(\gamma-\beta)/(\gamma-\alpha)}, \qquad \forall\, x \in D(A^\gamma).$$

7.4 假设 A 是扇性算子，$\mathrm{Re}\,\sigma(A) > 0$. 试证明：对任意 $0 < \alpha \leqslant 1, x \in X$, 有

$$\lim_{t\to 0^+} t^\alpha \|A^\alpha \mathrm{e}^{-tA} x\| = 0.$$

7.5 设 $\delta > 0$. 如果 $A-\delta$ 是 Hilbert 空间上的 m- 增生算子, 证明对所有 $\alpha \in [0,1]$, $A^\alpha - \delta^\alpha$ 也是 m- 增生算子.

7.6 取 $X = L^2(0,1)$, 在 X 上定义线性算子 A:

$$Au = -u'', \qquad \forall\, u \in D(A) := H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1).$$

试证明：

(1) $D(A^{1/2}) = H_0^1(0,1)$, 且 $\|A^{1/2}u\| = \|u'\|$ 对所有 $u \in H_0^1(0,1)$ 成立;

(2) 对于 $\alpha > 1/4$, 存在正常数 C, 使得 $\|u\|_\infty \leqslant C\|A^\alpha u\|$ 对所有 $u \in D(A^\alpha)$ 成立.

7.7 假设 A 是 Banach 空间 X 中的扇形算子，且存在 $\delta > 0$, 使得 $\mathrm{Re}\,\lambda > \delta$ 对所有 $\lambda \in \sigma(A)$ 成立. 试证明：对任意 $0 \leqslant \alpha < \beta < 1$, $A^{\alpha-\beta} = A^{-(\beta-\alpha)}$ 是紧的.

7.8 假设 A 是扇性算子， $\mathrm{Re}\,\sigma(A) > 0$. 证明下面的条件等价：

(1) 对任意 $\alpha > 0$, 算子 $A^{-\alpha}$ 是紧的;

(2) A^{-1} 是紧的;

(3) 对于任意 $t > 0$, 算子 e^{-tA} 是紧的.

7.9 设 A 是 Banach 空间 X 中的扇形算子， $\alpha \in (0,1)$, 且 $\mathrm{Re}\lambda > a$ 对所有 $\lambda \in \sigma(A)$ 成立. 证明对每一个 $u_0 \in X$, 存在唯一的 $u \in C([0,\infty), X)$, 满足 $u(0) = u_0$ 及

$$u'(t) + Au(t) = (A-\alpha)^\alpha u(t), \qquad t > 0.$$

7.10 设 $\sigma \in [1,3)$, $2 < q_1 < 3$. 定义序列 q_n ：

$$\frac{1}{q_n} = \sigma\left(\frac{1}{q_{n-1}} - \frac{1}{3}\right), \qquad n = 2, 3, \cdots.$$

试证明：存在 n, 使得 $q_n > 3$.

第八章　Schrödinger 方程

§8.1　预 备 知 识

记

$$X=H^{-1}(\Omega)=H^{-1}(\Omega,\mathbb{C}),\ \ Y=L^2(\Omega)=L^2(\Omega,\mathbb{C}),\ \ H_0^1(\Omega)=H_0^1(\Omega,\mathbb{C}).$$

对任意给定的 $u\in X$, 应用 Lax-Milgram 定理可以证明，问题

$$\begin{cases}-\mathrm{i}\triangle\varphi_u+\varphi_u=u, & x\in\Omega,\\ \varphi_u=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

有唯一解 $\varphi_u\in H_0^1(\Omega)$. 我们如下定义 $H^{-1}(\Omega)$ 上的内积

$$\langle u,v\rangle_{-1}=\langle\varphi_u,\varphi_v\rangle_{H^{-1}}=\mathrm{Re}\int_\Omega(\nabla\varphi_u\cdot\overline{\nabla\varphi}_v+\varphi_u\overline{\varphi}_v)\mathrm{d}x,\qquad\forall\ u,v\in X,$$

再按照如下方式定义 $L^2(\Omega)$ 和 $H_0^1(\Omega)$ 中的内积

$$\langle u,v\rangle_{L^2}=\mathrm{Re}\int_\Omega u\bar{v}\mathrm{d}x,\qquad\forall\ u,v\in L^2(\Omega),$$
$$\langle u,v\rangle_{H^1}=\langle u,v\rangle_{L^2}+\langle\nabla u,\nabla v\rangle_{L^2},\qquad\forall\ u,v\in H_0^1(\Omega).$$

那么，$H^{-1}(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ 和 $H_0^1(\Omega)$ 都是 Hilbert 空间. 为了书写方便，我们将略去内积符号 $\langle u,v\rangle_{H^{-1}}$, $\langle u,v\rangle_{L^2}$ 和 $\langle u,v\rangle_{H^1}$ 中的下角标，简记为 $\langle u,v\rangle$.

分别在空间 X 和 Y 中考察算子 A 和 B:

$$D(A)=H_0^1(\Omega),\ \ Au=-\mathrm{i}\Delta u,\qquad\forall\ u\in D(A).$$
$$D(B)=\{u\in H_0^1(\Omega):\ \Delta u\in Y\},\ \ Bu=-\mathrm{i}\Delta u,\qquad\forall\ u\in D(B).$$

由定理 3.2.10, 定理 2.5.17 和定理 2.5.15 知，$-A$ 和 $-B$ 分别生成等距群 $\{Q(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 和 $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. 因为 $G(B)\subset G(A)$, 我们有

引理 8.1.1　当 $u_0\in Y$ 时，$Q(t)u_0=S(t)u_0$ 成立.

证明　先设 $u_0\in D(B)$. 记 $u(t)=S(t)u_0$. 由定理 3.2.1 的结论 (4) 知，$u(t)\in D(B)\subset D(A)$, $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ 存在并且成立 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-Bu(t)=-Au(t)$. 再利用定理 3.2.1 的结论 (7), 又有 $u(t)=Q(t)u_0$. 故 $Q(t)u_0=S(t)u_0$. 根据定理 2.5.15, $D(B)$ 在 Y

中是稠的, 取 $u_{n0} \in D(B)$ 使得在 Y 中 $u_{n0} \to u_0$. 那么 $Q(t)u_{n0} = S(t)u_{n0}$, 并且在 X 中也有 $u_{n0} \to u_0$. 应用定理 3.2.1 的结论 (1), 我们有

$$\|Q(t)(u_{n0} - u_0)\|_X \leqslant M\mathrm{e}^{-at}\|u_{n0} - u_0\|_X \to 0,$$
$$\|S(t)(u_{n0} - u_0)\|_Y \leqslant M'\mathrm{e}^{-a't}\|u_{n0} - u_0\|_Y \to 0.$$

由此知

$$Q(t)u_0 \xleftarrow{X} Q(t)u_{n0} = S(t)u_{n0} \xrightarrow{Y} S(t)u_0,$$

故 $Q(t)u_0 = S(t)u_0$. 证毕.

我们先讨论等距群 $\{Q(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 的性质.

定理 8.1.2 设 $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, 并记 $u(t) = Q(t)u_0$. 那么 u 是问题

$$\begin{cases} u \in C(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{-1}(\Omega)), \\ \mathrm{i}u_t + \Delta u = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

的唯一解. 同时还有

$$\int_\Omega |u(t)|^2 \mathrm{d}x = \int_\Omega |u_0|^2 \mathrm{d}x, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}, \tag{8.1}$$

$$\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 \mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla u_0|^2 \mathrm{d}x, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{8.2}$$

此外, 若 $\Delta u_0 \in L^2(\Omega)$, 那么 $u \in C^1(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$, 并且 $\Delta u \in C(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$.

证明 第一个结论可由定理 3.2.10 直接推出. 又因为 $u_0 \in Y$, 所以 $u(t) = S(t)u_0$. 于是 $\|u(t)\|_2 = \|u(t)\|_Y = \|u_0\|_Y = \|u_0\|_2$. 等式 (8.1) 成立.

利用定理 3.2.1 的性质 (4) 知

$$\|Au(t)\|_X = \|Q(t)Au_0\|_X = \|Au_0\|_X, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{8.3}$$

因为 A 是斜共轭算子, 易证对于 $v \in H_0^1(\Omega)$, 成立

$$\|Av\|_X^2 = \|(-\mathrm{i}\Delta v + v) - v\|_X^2 = \int_\Omega |\nabla v|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega |v|^2 \mathrm{d}x - \|v\|_X^2. \tag{8.4}$$

由于 $\|u(t)\|_X = \|u_0\|_X$, $\forall t \in \mathbb{R}$, 因此在 (8.4) 式中分别取 $v = u(t)$ 和 $v = u_0$, 再利用 (8.1) 式和 (8.3) 式就可推出 (8.2) 式.

如果 $\Delta u_0 \in L^2(\Omega)$, 那么 $u_0 \in D(B)$, 并且 $u(t) = S(t)u_0$. 从而由定理 3.2.10 知, 定理的最后一个结论成立. 证毕.

定理 8.1.3 (Riesz-Thorin 插值定理 [3]) 记 $L^p(U, \mathrm{d}\mu)$ 是 U 上具有测度 $\mathrm{d}\mu$ 的 p 次可积函数空间. 假设 $p_0 \neq p_1$, $q_0 \neq q_1$, 并且算子 T 具有性质:

$$T \in \mathcal{L}(L^{p_0}(U, \mathrm{d}\mu), L^{q_0}(V, \mathrm{d}\nu)),$$
$$T \in \mathcal{L}(L^{p_1}(U, \mathrm{d}\mu), L^{q_1}(V, \mathrm{d}\nu)),$$

其算子范数分别为 M_0 和 M_1. 则对于任何满足

$$\theta \in [0,1], \qquad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

的 θ 和 p, q, 有

$$T \in \mathcal{L}(L^p(U, \mathrm{d}\mu), L^q(V, \mathrm{d}\nu)),$$

并且其算子范数 $M \leqslant M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$.

定理 8.1.4 设 $p \in [2, \infty]$, $t \neq 0$. 那么 $Q(t)$ 可以延拓成属于 $\mathcal{L}(L^{p'}(\mathbb{R}^N), L^p(\mathbb{R}^N))$ 的算子. 此外, 还有

$$\|Q(t)\|_{\mathcal{L}(L^{p'},\, L^p)} \leqslant (4\pi|t|)^{N(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}, \qquad \forall\, t \neq 0.$$

证明 令 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. 通过

$$\mathcal{F}[u(t)](\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\xi|^2 t}\mathcal{F}[\varphi](\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^N,\ t \in \mathbb{R} \tag{8.5}$$

定义了一个函数 $u(t) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$. 那么对所有 $t \in \mathbb{R}$, 成立

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}[u(t)](\xi) - |\xi|^2\mathcal{F}[u(t)](\xi) = 0, \qquad \xi \in \mathbb{R}^N.$$

对上式施行 Fourier 逆变换, 就有

$$\mathrm{i}u_t + \Delta u = 0, \qquad \xi \in \mathbb{R}^N,\ t \in \mathbb{R}.$$

由定理 8.1.2 知, $u(t) = Q(t)\varphi$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. 因为

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\xi|^2 t}](x) = (4\pi t)^{-N/2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}|x|^2}{4t}} := K(t)(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N,\ t \neq 0,$$

由 (8.5) 式推知, $u(t) = K(t) * \varphi$, $t \neq 0$. 于是

$$\|Q(t)\varphi\|_\infty \leqslant (4\pi t)^{-N/2}\|\varphi\|_1, \qquad \forall\, t \neq 0,\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

因此, 可以把 $Q(t)$ 延拓成属于 $\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^N), L^\infty(\mathbb{R}^N))$ 的算子, 还保持 $\|Q(t)\|_{\mathcal{L}(L^1, L^\infty)} \leqslant (4\pi|t|)^{-N/2}$ 的性质. 进一步还有, $Q(t) \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^N), L^2(\mathbb{R}^N))$, $\|Q(t)\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} = 1$. 再利用 Riesz-Thorin 插值定理, 就可以推出所要的结论. 证毕.

以下, 我们不区别 $\{Q(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 和 $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, 都用同一个符号 $\{Q(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 表示. 给定函数 $u_0 \in H_0(\Omega)$, 以及局部 Lipschitz 连续函数 $g : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$. 本章的目的是求解

$$u \in C([0,T], H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T], H^{-1}(\Omega)), \tag{8.6}$$

$$\mathrm{i}u_t + \Delta u + g(u) = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{8.7}$$

$$u(0) = u_0. \tag{8.8}$$

利用定理 3.5.1 和定理 4.2.7, 我们有

定理 8.1.5 设 $T > 0, u_0 \in H_0^1(\Omega), u \in C([0,T], H_0^1(\Omega))$. 那么 u 是问题 (8.6)~(8.8) 的解, 当且仅当 u 满足

$$u(t) = Q(t)u_0 + \mathrm{i}\int_0^t Q(t-s)g(u(s))\mathrm{d}s, \qquad t \in [0,T]. \tag{8.9}$$

利用推论 3.5.6, 可以证明

定理 8.1.6 设 $T > 0$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u \in L^\infty((0,T), H_0^1(\Omega))$. 那么 u 是问题 (8.9) 的解, 当且仅当 u 是问题

$$u \in L^\infty((0,T), H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}((0,T), H^{-1}(\Omega)),$$

$$\mathrm{i}u_t + \Delta u + g(u) = 0, \qquad \text{a. e. } t \in [0,T], \tag{8.10}$$

$$u(0) = u_0 \tag{8.11}$$

的解.

注 8.1.1 如果对于 $T > 0$, 问题 (8.6)~(8.8) 有解, 那么对于 $T < 0$, 问题 (8.6)~(8.8) 也有解. 特别当 g 满足某种对称条件时, 此结论是显然的. 比如, 若 g 满足 $g(\bar{u}) = \overline{g(u)}$, 那么 $v(t) = \overline{u(-t)}$ 在 $[0,T]$ 上满足方程 (8.7) 当且仅当 u 在 $[-T,0]$ 上满足方程 (8.7).

§8.2 一个一般性结论

假设 $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 是整体 Lipschitz 连续的, $g(0) = 0$. 按如下方式把 g 延拓到整个复平面上:

$$g(z)=\frac{z}{|z|}g(|z|),\qquad \forall\, z\in\mathbb{C},\ z\neq 0. \tag{8.12}$$

这样，通过 g 就定义了一个从 $L^2(\Omega)$ 到 $L^2(\Omega)$ 的映射，仍记为 g：

$$g(v)(x)=g(v(x)),\qquad \forall\, v\in L^2(\Omega),\, x\in\Omega, \tag{8.13}$$

并且 g 在 $L^2(\Omega)$ 上是 Lipschitz 连续的．定义

$$G(z)=\int_0^{|z|}g(s)\mathrm{d}s,\qquad \forall\, z\in\mathbb{C}, \tag{8.14}$$

并记

$$V(v)=-\int_\Omega G(v(x))\mathrm{d}x,\qquad \forall\, v\in L^2(\Omega). \tag{8.15}$$

类似于定理 6.3.2 的证明，我们有 $V\in C^1(L^2(\Omega),\mathbb{R})$, 并且成立

$$V'(v)=-g(v),\qquad \forall\, v\in L^2(\Omega). \tag{8.16}$$

最后，定义泛函 $E\in C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$：

$$E(v)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla v|^2\mathrm{d}x+V(v),\qquad \forall\, v\in H_0^1(\Omega), \tag{8.17}$$

那么

$$\langle E'(v),\varphi\rangle=\mathrm{Re}\int_\Omega\nabla v\cdot\overline{\nabla\varphi}\mathrm{d}x-\mathrm{Re}\int_\Omega g(v)\bar{\varphi}\mathrm{d}x,\qquad \forall\,\varphi\in H_0^1(\Omega). \tag{8.18}$$

定理 8.2.1 设 $u_0\in L^2(\Omega)$. 那么，唯一存在 $u\in C([0,\infty),L^2(\Omega))$, 使得对任意 $T<\infty$, u 是问题 (8.9) 的解，同时成立

$$\|u(t)\|_2=\|u_0\|_2,\qquad \forall\, t\geqslant 0. \tag{8.19}$$

进一步，若 $u_0\in H_0^1(\Omega)$, 则 $u\in C([0,\infty),H_0^1(\Omega))\cap C^1([0,\infty),H^{-1}(\Omega))$, 且有

$$E(u(t))=E(u_0),\qquad \forall\, t\geqslant 0. \tag{8.20}$$

更进一步，如果又有 $\Delta u_0\in L^2(\Omega)$, 那么

$$\Delta u\in C([0,\infty),L^2(\Omega)),\qquad u\in C^1([0,\infty),L^2(\Omega)).$$

为证此定理，先证下面的引理．

引理 8.2.2 设 $T>0$, $u\in C([0,T],D(B))\cap C^1([0,T],L^2(\Omega))$, 则 $\|\nabla u(t)\|_2^2\in C^1([0,T])$, 且成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u(t)\|_2^2=-2\langle\Delta u(t),u_t(t)\rangle,\qquad\forall\ t\in[0,T].$$

证明 如果 $u\in C^1([0,T],D(B))$, 那么结论是显然的. 对于一般的 u, 利用稠密性可知结论成立 (可以仿照定理 6.2.1 的证明).

下面分七步证明定理 8.2.1.

第一步 假设 $u_0\in L^2(\Omega)$. 因为 g 是整体 Lipschitz 连续的, 所以由定理 4.1.2 知, 唯一存在 $u\in C([0,\infty),L^2(\Omega))$, 使得对任意 $T<\infty$, u 是问题

$$u(t)-u_0+A\int_0^t u(s)\mathrm{d}s=\mathrm{i}\int_0^t g(u(s))\mathrm{d}s,\qquad\forall\ t\in[0,T]$$

的解. 因为 $g(u(s))\in L^1([0,T],X)$, 所以由定理 3.5.3 知, u 是问题 (8.9) 的解.

第二步 如果 $u_0\in D(A)$, 那么由定理 4.2.7 得解的正则性, 并且对任意 $T<\infty$, 在 $X=H^{-1}(\Omega)$ 中 u 满足方程 (8.7). 同理可知, 如果 $u_0\in D(B)$, 则 $u\in C([0,\infty),D(B))\cap C^1([0,\infty),L^2(\Omega))$, 并且在 $Y=L^2(\Omega)$ 中 u 满足方程 (8.7).

第三步 证明守恒式 (8.19). 如果 $u_0\in D(B)$, 那么在 $L^2(\Omega)$ 中用 u 与方程 (8.7) 作内积得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|_2^2=\langle u_t,u\rangle=\langle\mathrm{i}\Delta u(t),u(t)\rangle+\langle\mathrm{i}g(u(t)),u(t)\rangle.$$

因为

$$\begin{aligned}\langle\mathrm{i}\Delta w,w\rangle&=\mathrm{Re}\int_\Omega\mathrm{i}\Delta w\bar{w}\mathrm{d}x=-\mathrm{Re}\int_\Omega\mathrm{i}|\nabla w|^2\mathrm{d}x=0,\qquad\forall\ w\in D(B),\\ \langle\mathrm{i}g(w),w\rangle&=\mathrm{Re}\int_\Omega\mathrm{i}g(w)\bar{w}\mathrm{d}x=\mathrm{Re}\int_\Omega\mathrm{i}g(|w|)|w|\mathrm{d}x=0,\qquad\forall\ w\in L^2(\Omega),\end{aligned}$$

所以

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|_2^2=0.$$

因此, (8.19) 式成立. 对于 $u_0\in L^2(\Omega)$ 的情况, 利用稠密性及定理 4.2.4 知, (8.19) 式仍然成立.

第四步 证明当 $u_0\in D(B)$ 时, 守恒式 (8.20) 成立. 在 $L^2(\Omega)$ 中用 u_t 与方程 (8.7) 作内积, 得

$$0=\mathrm{Re}\int_\Omega\mathrm{i}|u_t|^2\mathrm{d}x=\langle\mathrm{i}u_t,u_t\rangle=-\langle\Delta u,u_t\rangle-\langle g(u),u_t\rangle,\qquad t\geqslant 0.$$

类似于推论 6.3.6 的证明，易证

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(u(t)) = -\mathrm{Re}\int_\Omega g(u(t))\overline{u_t(t)}\mathrm{d}x = -\langle g(u), u_t\rangle, \qquad \forall\, t\in[0,T]. \tag{8.21}$$

再利用引理 8.2.2 得

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 + V(u(t))\right\} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(u(t)).$$

从而 (8.20) 式成立.

第五步 证明：如果 $u_0\in H_0^1(\Omega)$, 那么 $u:[0,\infty)\longrightarrow H_0^1(\Omega)$ 弱连续，且成立

$$E(u(t))\leqslant E(u_0), \qquad \forall\, t\geqslant 0. \tag{8.22}$$

事实上，存在 $u_{0n}\in D(B)$, 使得在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_{0n}\to u_0$. 令 u_n 是方程 (8.7) 以 u_{0n} 为初值的解. 因为 g 在 $L^2(\Omega)$ 上 Lipschitz 连续，所以由 (8.19) 式和 (8.20) 式知，u_n 在 $L^\infty([0,T),H_0^1(\Omega))$ 中有界. 利用定理 4.2.4 知

$$\text{在 } C([0,T],L^2(\Omega)) \text{ 中，} \ u_n\to u(\text{当 } n\to\infty \text{ 时}). \tag{8.23}$$

特别地，对于任意固定的 $t\in[0,T]$, 在 $L^2(\Omega)$ 中 $u_n(t)\to u(t)$. 因为 $\|u_n(t)\|_{H_0^1(\Omega)}$ 有界，所以

$$\text{在 } H_0^1(\Omega) \text{ 中，} \ u_n(t)\rightharpoonup u(t). \tag{8.24}$$

再利用命题 1.2.14 知， $u\in L^\infty((0,T),H_0^1(\Omega))$. 又因为 $u\in C([0,T],L^2(\Omega))$, 所以

$$u:[0,T]\longrightarrow H_0^1(\Omega) \ \text{弱连续}.$$

根据 (8.24) 式以及范数的弱下半连续性， $\|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\|u_n(t)\|_{H_0^1(\Omega)}$. 因为 u_n 满足 $E(u_n(t))=E(u_{0n})$, 并且在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_{0n}\to u_0$, 所以由 (8.23) 式知，不等式 (8.22) 成立.

第六步 证明当 $u_0\in H_0^1(\Omega)$ 时，守恒式 (8.20) 成立. 对于 $s\in(0,\infty)$, 令

$$v(t)=\overline{u(s-t)}, \qquad t\in[0,s].$$

因为算子 A 生成的等距群是 $Q(-t)$, 所以易证在 $[0,s]$ 上， v 是方程 (8.7) 以 $\bar{u}(s)$ 为初值的适度解. 于是，对 v 利用 (8.22) 式知

$$E(u_0)=E(u(0))=E(v(s))\leqslant E(v(0))=E(u(s)). \tag{8.25}$$

联立 (8.22) 式和 (8.25) 式，就推出 (8.20) 式.

第七步 证明：若 $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, 则 $u \in C([0,\infty), H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,\infty), H^{-1}(\Omega))$. 事实上，因为 g 在 $L^2(\Omega)$ 上 Lipschitz 连续， $X = H^{-1}(\Omega)$ 是自反的，所以由定理 4.2.7 知，结论成立.

注 8.2.1 在定理 8.2.1 中，要求 g 整体 Lipschitz 连续，这是一个非常强的条件.

§8.3 $\mathbb{R}^N$ 上的线性 Schrödinger 方程

设 $\Omega = \mathbb{R}^N, T > 0$. 为了书写方便，下面我们分别用 L^p, H^1, H^2 和 H^{-1} 表示空间 $L^p(\mathbb{R}^N)$, $H^1(\mathbb{R}^N), H^2(\mathbb{R}^N)$ 和 $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$. 本节之目的是利用 3.5 节的结果来估计非齐次 Schrödinger 方程初值问题

$$\begin{cases} \mathrm{i}u_t + \Delta u + f = 0, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

的解. 为此，我们定义线性算子 Φ, Ψ 及 Θ_t $(t \in [0,T])$：对于 $f \in L^1((0,T), H^{-1})$, 令

$$\Phi_f(t) = \int_0^t Q(t-s)f(s)\mathrm{d}s, \qquad \forall\, t \in [0,T],$$

$$\Psi_f(s) = \int_s^T Q(s-t)f(t)\mathrm{d}t, \qquad \forall\, s \in [0,T],$$

$$\Theta_{t,f}(s) = \int_0^t Q(s-\sigma)f(\sigma)\mathrm{d}\sigma, \qquad \forall\, s \in [0,T].$$

易证

$$\Phi,\ \Psi,\ \Theta_t \in \mathcal{L}(L^1((0,T), H^{-1}),\ C([0,T],\ H^{-1})) \cap \mathcal{L}(L^1((0,T), H^1),\ C([0,T],\ H^1)),$$

见引理 3.5.2.

定义 8.3.1 一对正数 (p,q) 称为是一个容许对，如果

(i) $2 \leqslant q < \dfrac{2N}{N-2}$ (其中，当 $N=2$ 时，$2 \leqslant q < \infty$; 当 $N=1$ 时，$2 \leqslant q \leqslant \infty$);

(ii) $\dfrac{2}{p} = N\Big(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{q}\Big)$.

注 8.3.1 如果 (p,q) 是一个容许对，那么 $H^1 \hookrightarrow L^q$, 并且 H^1 在 L^q 中是稠的. 从而， $L^{q'} \hookrightarrow H^{-1}$. 于是

$$C([0,T], H^1) \hookrightarrow L^p((0,T), L^q),$$

$$L^{p'}((0,T), L^{q'}) \hookrightarrow L^1((0,T),\ H^{-1}).$$

特别地

$$\Phi,\ \Psi,\ \Theta_t \in \mathcal{L}(L^{p'}((0,T),L^{q'}),\ C([0,T],\ H^{-1})).$$

下面，我们简单地用 $\|\cdot\|_{L_T^{p,q}}$ 表示范数 $\|\cdot\|_{L^p((0,T),L^q)}$.

注 8.3.2 如果 (p,q) 是一个容许对，那么对于 $u\in L^p((0,T),L^q)$, 我们有

$$\|u\|_{L_T^{p,q}}=\sup\left\{\left|\int_0^T \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^N} u\bar{\varphi}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| : \varphi\in L^{p'}((0,T),L^{q'}),\ \|\varphi\|_{L_T^{p',q'}}\leqslant 1\right\}.$$

利用截断和正则化方法，还可以证明

$$\|u\|_{L_T^{p,q}}=\sup\left\{\left|\int_0^T \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^N} u\bar{\varphi}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| : \varphi\in L^{p'}((0,T),L^{q'})\cap C([0,T],H^1),\ \|\varphi\|_{L_T^{p',q'}}\leqslant 1\right\}.$$

本节的主要结论是

定理 8.3.1 设 (γ,ρ) 是一个容许对，$f\in L^{\gamma'}((0,T),L^{\rho'})$. 那么 $\Phi_f\in C([0,T],L^2)$, 并且对任意容许对 (p,q), 有 $\Phi_f\in L^p((0,T),L^q)$. 另外，还存在仅依赖于 γ 和 p 的常数 $C=C(\gamma,p)$, 使得

$$\|\Phi_f\|_{L_T^{p,q}}\leqslant C(\gamma,p)\|f\|_{L_T^{\gamma',\rho'}},\quad \forall\ f\in L^{\gamma'}((0,T),L^{\rho'}). \tag{8.26}$$

证明 分成六步进行论证.

第一步 证明对所有的容许对 (p,q), 算子 $\Phi\in\mathcal{L}(L^{p'}((0,T),L^{q'}),\ L^p((0,T),L^q))$, 且范数仅依赖于 p. 事实上，由稠密性，只需考虑 $f\in C([0,T],L^{q'})$ 的情形. 利用定理 8.1.4 推知， $\Phi_f\in C([0,T],L^q)$, 并且对于 $t\in[0,T]$, 成立

$$\|\Phi_f(t)\|_q\leqslant C\int_0^t |t-s|^{-N(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}\|f(s)\|_{q'}\mathrm{d}s\leqslant C\int_0^T |t-s|^{-\frac{2}{p}}\|f(s)\|_{q'}\mathrm{d}s.$$

再利用 Riesz 位势的经典估计就得到

$$\|\Phi_f\|_{L_T^{p,q}}\leqslant C\|f\|_{L_T^{p',q'}},$$

这里的常数 C 仅依赖于 p.

第二步 类似可证， $\Psi,\ \Theta_t\in\mathcal{L}(L^{p'}((0,T),L^{q'}),\ L^p((0,T),L^q))$, 且范数也仅依赖于 p.

第三步 证明对所有的容许对 (p,q), 算子 $\Phi\in\mathcal{L}(L^{p'}((0,T),L^{q'}),\ C([0,T],L^2))$, 且范数也仅依赖于 p. 事实上，由稠密性，我们只需考虑 $f\in C([0,T],L^{q'})$ 的情形. 再通过选取正则化序列，还可以进一步假设 $f\in C([0,T],H^1)$. 于是， $\Phi_f\in$

$C([0,T],H^1)$. 用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 L^2 中的内积. 利用定理 3.2.10 知，对所有 $t\in[0,T]$, 成立

$$\begin{aligned}\|\Phi_f(t)\|_2^2 &= \left\langle\int_0^t Q(t-s)f(s)\mathrm{d}s,\ \int_0^t Q(t-\sigma)f(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right\rangle\\ &= \int_0^t\int_0^t \langle Q(t-s)f(s),\ Q(t-\sigma)f(\sigma)\rangle\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}s\\ &= \int_0^t\int_0^t \langle f(s),\ Q(s-\sigma)f(\sigma)\rangle\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}s = \int_0^t \langle f(s),\ \Theta_{t,f}(s)\rangle\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

先关于空间变量，再关于时间变量利用 Hölder 不等式，并利用第二步的结论知

$$\|\Phi_f(t)\|_2^2 \leqslant \|f\|_{L_T^{p',q'}}\|\Theta_{t,f}\|_{L_T^{p,q}} \leqslant C(p)\|f\|_{L_T^{p',q'}}^2, \qquad \forall\, t\in[0,T].$$

结论成立.

第四步　类似可证， $\Psi,\Theta_t\in\mathcal{L}(L^{p'}((0,T),L^{q'}),C([0,T],L^2))$, 且范数也仅依赖于 p.

第五步　证明对所有的容许对 (p,q), 算子 $\Phi\in\mathcal{L}(L^1((0,T),L^2),L^p((0,T),L^q))$, 且范数也仅依赖于 p. 事实上, 取 $\varphi\in L^{p'}((0,T),L^{q'})\cap C([0,T],H^1)$ 满足 $\|\varphi\|_{L_T^{p',q'}}\leqslant 1$. 因为 $\Phi_f\in C([0,T],L^2)$ (见第三步), 所以

$$\begin{aligned}\int_0^T \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^N}\Phi_f\bar{\varphi}\mathrm{d}x\mathrm{d}t &= \int_0^T\langle\Phi_f(t),\varphi(t)\rangle\mathrm{d}t\\ &= \int_0^T\int_0^t\langle Q(t-s)f(s),\varphi(t)\rangle\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\ &= \int_0^T\int_0^t\langle f(s),\ Q(s-t)\varphi(t)\rangle\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\ &= \int_0^T\int_s^T\langle f(s),\ Q(s-t)\varphi(t)\rangle\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\ &= \int_0^T\langle f(s),\ \Psi_\varphi(s)\rangle\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

又因为 $\|\Psi_\varphi\|_{L_T^{\infty,2}}\leqslant C(p)\|\varphi\|_{L_T^{p',q'}}\leqslant C(p)$ (见第四步), 所以利用 Cauchy-Schwarz 不等式从上式推出

$$\left|\int_0^T\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^N}\Phi_f\bar{\varphi}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| \leqslant \|f\|_{L_T^{1,2}}\|\Psi_\varphi\|_{L_T^{\infty,2}}\leqslant C(p)\|f\|_{L_T^{1,2}}.$$

于是由注 8.3.2 知，结论成立.

第六步　证明定理的结论. 设 (γ,ρ) 是一个容许对. 由第一步和第三步知

$$\Phi\in\mathcal{L}(L^{\gamma'}((0,T),L^{\rho'}),C([0,T],L^2))\cap\mathcal{L}(L^{\gamma'}((0,T),L^{\rho'}),L^\gamma((0,T),L^\rho)).$$

若 (p,q) 是一个容许对，满足 $2 \leqslant q \leqslant \rho$. 取 $\theta \in [0,1]$, 使得

$$\frac{1}{q} = \frac{\theta}{\rho} + \frac{1-\theta}{2}, \qquad \frac{1}{p} = \frac{\theta}{\gamma} + \frac{1-\theta}{\infty}.$$

先关于空间变量，再关于时间变量利用 Hölder 不等式，得

$$\|\Phi_f\|_{L_T^{p,q}} \leqslant \|\Phi_f\|_{L_T^{\gamma,\rho}}^{\theta} \|\Phi_f\|_{L_T^{\infty,2}}^{1-\theta} \leqslant C(p,\gamma)\|f\|_{L_T^{\gamma',\rho'}}.$$

由此知， $\Phi \in \mathcal{L}(L^{\gamma'}((0,T),L^{\rho'}),L^p((0,T),L^q))$. 若 (p,q) 是一个容许对，满足 $\rho < q$. 选取 $\mu \in (0,1)$, 使得

$$\frac{1}{\gamma'} = \frac{\mu}{1} + \frac{1-\mu}{p'}, \qquad \frac{1}{\rho'} = \frac{\mu}{2} + \frac{1-\mu}{q'}.$$

由第一步和第五步知

$$\Phi \in \mathcal{L}(L^{p'}((0,T),L^{q'}),L^p((0,T),L^q)) \cap \mathcal{L}(L^1((0,T),L^2),L^p((0,T),L^q)).$$

再利用内插定理推知，对于 $\theta \in (0,1)$ 以及所有满足

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{\theta}{1} + \frac{1-\theta}{p'}, \qquad \frac{1}{\delta} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{q'}$$

的 (σ,δ), 有 $\Phi \in \mathcal{L}(L^\sigma((0,T),L^\delta),\ L^p((0,T),L^q))$. 若取 $\theta = \mu$, 则 $\sigma = \gamma', \delta = \rho'$. 从而

$$\Phi \in \mathcal{L}(L^{\gamma'}((0,T),L^{\rho'}),L^p((0,T),L^q)).$$

证毕.

推论 8.3.2 设 (γ,ρ) 是一个容许对， $f \in C([0,T],L^2) \cap W^{1,\gamma'}((0,T),\ L^{\rho'})$. 那么 $\Phi_f \in C([0,T],\ H^2) \cap C^1([0,T],L^2)$.

证明 显然， $f \in W^{1,1}([0,T],H^{-1})$. 再由定理 3.5.7 知， $\Phi_f \in C([0,T],\ H^1) \cap C^1([0,T],\ H^{-1})$, 并且满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_f = \mathrm{i}\Delta\Phi_f + f, \qquad \forall\, t \in [0,T]. \tag{8.27}$$

此外，还有

$$\Phi_f(t) = \int_0^t Q(s)f(t-s)\mathrm{d}s.$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_f(t) = Q(t)f(0) + \int_0^t Q(s)f'(t-s)\mathrm{d}s = \Phi_{f'}(t) + Q(t)f(0). \tag{8.28}$$

由定理 8.3.1 及 (8.28) 式知, $\Phi_f \in C^1([0,T],L^2)$. 再由 (8.27) 式和 $f \in C([0,T],L^2)$ 知, $\Delta\Phi_f \in C([0,T],L^2)$. 从而 $\Phi_f \in C([0,T],\, H^2)$. 证毕.

定理 8.3.3 设 $\varphi \in L^2$. 那么对所有的容许对 (p,q), 有 $Q(\cdot)\varphi \in L^p(\mathbb{R},L^q)$. 此外, 存在仅依赖于 p 的常数 $C(p)$, 使得

$$\|Q(\cdot)\varphi\|_{L^p(\mathbb{R},L^q)} \leqslant C(p)\|\varphi\|_2, \qquad \forall\, \varphi \in L^2.$$

证明 该定理的证明与定理 8.3.1 类似, 这里只给出证明梗概. 令

$$\Lambda_f(t) = \int_{\mathbb{R}^1} Q(t-s)f(s)\mathrm{d}s, \quad \Gamma_f = \int_{\mathbb{R}^1} Q(-t)f(t)\mathrm{d}t.$$

同于定理 8.3.1 的证明中的第一步, 可证

$$\|\Lambda_f\|_{L^p(\mathbb{R},L^q)} \leqslant C(p)\|f\|_{L^{p'}(\mathbb{R},L^{q'})}.$$

同于定理 8.3.1 的证明中的第三步, 可证

$$\|\Gamma_f\|_2 \leqslant \|f\|_{L^{p'}(\mathbb{R},\,L^{q'})}.$$

注意到

$$\left|\int_{\mathbb{R}^1}\langle Q(t)\varphi,\, \psi(t)\rangle\mathrm{d}t\right| = \left|\left\langle \varphi,\, \int_{\mathbb{R}^1} Q(-t)\psi(t)\mathrm{d}t\right\rangle\right| \leqslant C(p)\|\varphi\|_2\|\psi\|_{L^{p'}(\mathbb{R},\,L^{q'})},$$

因此利用注 8.3.2, 并同于定理 8.3.1 的证明中的第五步, 就可推出最后结论.

§8.4 非线性 Schrödinger 方程的初值问题: 局部存在性

取 $\Omega = \mathbb{R}^N$. 本节之目的, 是把定理 8.2.1 推广到一般的非线性函数 g. 下面, 我们总假设 $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, 满足 $g(0) = 0$, 并且存在常数 $K > 0$ 和 $\alpha \geqslant 0$, 满足 $\alpha(N-2) < 4$, 使得

$$|g(x) - g(y)| \leqslant K(1 + |x|^\alpha + |y|^\alpha)|x-y|, \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{R}_+.$$

按照 (8.12) 式的方式把 g 延拓到整个复平面, 并按照 (8.14) 式的方式定义函数 $G : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$. 按照 (8.13) 式的方式, g 定义了一个从 $L^{1+\alpha}_{\text{loc}}$ 到 L^1_{loc} 的映射. 同于 6.3 节, 可以证明: $g : H^1 \to H^{-1}$ 是连续的, 并且由 (8.15) 式定义的泛函 V 在 H^1 上连续. 最后, 按照 (8.17) 式的方式定义 H^1 上的泛函 E. 本节的主要结论是

定理 8.4.1 对每一个 $u_0 \in H^1$, 都存在 $\tau_0 := \tau(u_0) \in (0,\infty]$ 以及函数 $u \in C([0,\tau_0),\, H^1)$, 使得对任意 $T < \tau_0$, u 是问题 (8.6)~(8.8) 的唯一解. 此外还有:

(i) 如果 $\tau_0 < \infty$, 则 $\lim\limits_{t\to\tau_0} \|u(t)\|_{H^1} = \infty$;

(ii) $\|u(t)\|_2 = \|u_0\|_2$ 对所有 $t \in [0,\tau_0)$ 成立;

(iii) $E(u(t)) = E(u_0)$ 对所有 $t \in [0,\tau_0)$ 成立.

最后，如果视 $\tau(u_0)$ 为 H^1 到 $(0,\infty]$ 的函数, 则 $\tau(u_0)$ 是下半连续的，u 按下面的方式连续依赖于初值 u_0: 若在 H^1 中 $u_{0n} \to u_0$, 并记 u_n 和 u 分别是问题 (8.6)~(8.7) 以 u_{0n} 和 u_0 为初值的唯一解，那么对任意 $T < \tau_0$, 在 $C([0,T], H^1)$ 中 $u_n \to u$.

8.4.1 若干估计

定义 $k \in C(\mathbb{C},\mathbb{C})$：

$$k(z) = \begin{cases} g(z), & \text{如果 } |z| \leqslant 1, \\ zg(1), & \text{如果 } |z| \geqslant 1. \end{cases}$$

对于 $m \in \mathbb{N}$, 定义 $g_m, h_m \in C(\mathbb{C},\mathbb{C})$：

$$g_m(z) = \begin{cases} g(z), & \text{如果 } |z| \leqslant m, \\ \dfrac{z}{m} g(m), & \text{如果 } |z| \geqslant m, \end{cases}$$

$$h_m(z) = g_m(z) - k(z).$$

记

$$g_\infty = g, \quad h_\infty = g - k.$$

对于 $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, 定义 $G_m \in C(\mathbb{C},\mathbb{R})$：

$$G_m(z) = \int_0^{|z|} g_m(s)\mathrm{d}s.$$

那么，对所有 $m \in \mathbb{N}$, 函数 g_m 是整体 Lipschitz 连续的．对于 $u \in H^1$, 定义

$$V_m(u) = -\int_{\mathbb{R}^N} G_m(u)\mathrm{d}x, \qquad V_\infty = V,$$

$$E_m(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + V_m(u), \qquad E_\infty = E.$$

最后，对任意 $T > 0$, $u \in L^\infty((0,T), H^1)$ 以及 $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, 定义

$$\mathcal{G}_m(u)(t) = \int_0^t Q(t-s)g_m(u(s))\mathrm{d}s, \quad \forall\, t \in [0,T],$$

$$\mathcal{H}_m(u)(t) = \int_0^t Q(t-s)h_m(u(s))\mathrm{d}s, \quad \forall\, t \in [0,T],$$

$$\mathcal{K}(u)(t) = \int_0^t Q(t-s)k(u(s))\mathrm{d}s, \quad \forall\, t \in [0,T],$$

$$\mathcal{G}(u)(t) = \mathcal{G}_\infty(u)(t), \quad \mathcal{H}(u)(t) = \mathcal{H}_\infty(u)(t), \quad \forall\, t \in [0,T].$$

适当改变 K 的值，容易证明：对所有 $m\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, 以及所有 $z,z_1,z_2\in\mathbb{C}$, 成立

$$|g_m(z_1)-g_m(z_2)|\leqslant K(1+|z_1|^\alpha+|z_2|^\alpha)|z_1-z_2|, \tag{8.29}$$

$$|h_m(z_1)-h_m(z_2)|\leqslant K(|z_1|^\alpha+|z_2|^\alpha)|z_1-z_2|, \tag{8.30}$$

$$|k(z_1)-k(z_2)|\leqslant K|z_1-z_2|. \tag{8.31}$$

下面，我们记 $\beta=2+\alpha$, $\sigma=4(2+\alpha)/(N\alpha)$. 显然，$(\sigma,\beta)$ 是一个容许对.

引理 8.4.2 设 $M<\infty$. 则存在正常数 $C(M)$ 和 ν, 使得对所有 $m\in\mathbb{N}$, 以及满足 $\|u\|_{H^1},\|v\|_{H^1}\leqslant M$ 的 $u,v\in H^1$, 成立

$$\|k(u)-k(v)\|_2\leqslant C(M)\|u-v\|_2, \tag{8.32}$$

$$\|h_m(u)-h_m(v)\|_{\beta'}\leqslant C(M)\|u-v\|_\beta, \tag{8.33}$$

$$\|g_m(u)-g(u)\|_{\beta'}\leqslant C(M)m^{-\nu}. \tag{8.34}$$

证明 不等式 (8.32) 是不等式 (8.31) 的直接推论. 利用 Hölder 不等式以及嵌入关系 $H^1\hookrightarrow L^\beta$, 由不等式 (8.30) 就可以推出不等式 (8.33). 因为 $(N-2)\beta<2N$, 故存在 $q>\beta$, 使得 $(N-2)q<2N$. 又因为

$$|g_m(z)-g(z)|\leqslant\begin{cases}0, & |z|\leqslant m,\\ K|z|^{1+\alpha}, & |z|\geqslant m,\end{cases} \tag{8.35}$$

所以

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|g_m(u)-g(u)|^{\beta'}\mathrm{d}x&\leqslant K\int_{|u|\geqslant m}|u|^\beta\mathrm{d}x\leqslant Km^{-(q-\beta)}\int_{|u|\geqslant m}|u|^q\mathrm{d}x\\&\leqslant CKm^{-(q-\beta)}\|u\|_{H^1}^q.\end{aligned}$$

由此得不等式 (8.34). 证毕.

引理 8.4.3 设 $M<\infty$. 则存在正常数 $C(M)$ 和 μ, 使得对所有 $m\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 以及满足 $\|u\|_{H^1},\|v\|_{H^1}\leqslant M$ 的 $u,v\in H^1$, 都成立

$$|V_m(u)-V_m(v)|\leqslant C(M)(\|u-v\|_2+\|u-v\|_2^{1-2/\sigma}), \tag{8.36}$$

$$|V_m(u)-V(u)|\leqslant C(M)m^{-\mu}. \tag{8.37}$$

证明 由估计式 (8.29) 知

$$|G_m(z_2)-G_m(z_1)|\leqslant K(|z_1|+|z_2|+|z_1|^{1+\alpha}+|z_2|^{1+\alpha})|z_2-z_1|.$$

再利用 Hölder 不等式得

$$|V_m(u)-V_m(v)|\leqslant C(\|u\|_2+\|v\|_2)\|u-v\|_2+C(\|u\|_\beta^{1+\alpha}+\|v\|_\beta^{1+\alpha})\|u-v\|_\beta.$$

另一方面，根据定理 1.1.4, 对任意 $u\in H^1$, 有

$$\|u\|_\beta\leqslant\|u\|_{H^1}^a\|u\|_2^{1-a},\quad 其中\ a=N\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{\beta}\Big)=\frac{2}{\sigma},\tag{8.38}$$

从而估计式 (8.36) 成立. 由 (8.35) 式推知

$$|G_m(z)-G(z)|\leqslant\begin{cases}0, & |z|\leqslant m,\\ \dfrac{K}{\beta}|z|^\beta, & |z|\geqslant m.\end{cases}$$

同于估计式 (8.34) 的证明，可以推出估计式 (8.37).

引理 8.4.4 设 $M<\infty$, (p,q) 是一个容许对. 那么, 存在正常数 $C(M,p)$ 和 ν, 使得对任意 $T>0$, $m\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, 以及满足 $\|u\|_{L^\infty((0,T),\,H^1)}$, $\|v\|_{L^\infty((0,T),\,H^1)}\leqslant M$ 的 $u,v\in L^\infty((0,T),\,H^1)$, 都成立

$$\|\mathcal{K}(u)-\mathcal{K}(v)\|_{L_T^{p,q}}\leqslant C(M,p)T\|u-v\|_{L_T^{\infty,2}},\tag{8.39}$$

$$\|\mathcal{H}_m(u)-\mathcal{H}_m(v)\|_{L_T^{p,q}}\leqslant C(M,p)T^{1-2/\sigma}\|u-v\|_{L_T^{\sigma,\beta}},\tag{8.40}$$

$$\|\mathcal{G}_m(u)-\mathcal{G}(u)\|_{L_T^{p,q}}\leqslant C(M,p)T^{1-1/\sigma}m^{-\nu}.\tag{8.41}$$

证明 先利用估计式 (8.26), 再关于 t 在 $[0,T]$ 上利用 Hölder 不等式，最后分别利用估计式 (8.32), (8.33) 和 (8.34), 就可以推出估计式 (8.39), (8.40) 和 (8.41).

引理 8.4.5 设 $T>0$, $u\in L^\infty((0,T),\,H^1)\cap W^{1,\infty}((0,T),\,H^{-1})$, 并令

$$K=\max\{\|u\|_{L^\infty((0,T),\,H^1)},\ \|u'\|_{L^\infty((0,T),\,H^{-1})}\}.$$

那么， $u\in C([0,T],L^2)$, 并且成立

$$\|u(t)-u(s)\|_2\leqslant 2K|t-s|^{1/2},\qquad\forall\ t,s\in[0,T].$$

证明 对所有 $t,s\in[0,T]$, 我们有

$$\begin{aligned}\|u(t)-u(s)\|_2^2&=\langle u(t)-u(s),u(t)-u(s)\rangle_{H^{-1},H^1}\leqslant 2K\|u(t)-u(s)\|_{H^{-1}}\\&=2K\Big\|\int_s^t u'(\sigma)\mathrm{d}\sigma\Big\|_{H^{-1}}\leqslant 2K\int_s^t\|u'(\sigma)\|_{H^{-1}}\mathrm{d}\sigma\\&\leqslant 2K^2|t-s|.\end{aligned}$$

故结论成立.

引理 8.4.6 设 $T>0$, $u\in L^\infty((0,T),H^1)\cap C([0,T],L^2)$. 又设 $q\geqslant 2$ 满足 $q(N-2)<2N$. 那么 $u\in C([0,T],L^q)$, 并且

$$\|u\|_{L_T^{\infty,q}}\leqslant\|u\|_{L^\infty((0,T),H^1)}^{N(1/2-1/q)}\|u\|_{L_T^{\infty,2}}^{1-N(1/2-1/q)}. \tag{8.42}$$

证明 应用不等式 (8.38) 于函数 $w(t)=u(t+h)-u(t)$(用 q 代替不等式 (8.38) 中的 β), 即得连续性. 再把不等式 (8.38) 直接用于函数 u, 即得估计式 (8.42).

8.4.2 定理 8.4.1 的证明

先证唯一性.

引理 8.4.7 设 $T>0$, $u_0\in H^1$. 那么问题 (8.9) 在函数类 $L^\infty((0,T),H^1)$ 中至多有一个解.

证明 假设 $u,v\in L^\infty((0,T),H^1)$ 都是问题 (8.9) 的解. 由定理 8.1.6 和引理 8.4.5 知, $u,v\in C([0,T],L^2)$. 令

$$\theta=\sup\left\{t\in[0,T]: u=v \text{ 在 } [0,t] \text{ 上成立}\right\}.$$

如果 $\theta=T$, 那么在 $[0,T]$ 上 $u=v$. 下面用反证法说明不可能出现 $\theta<T$ 的情况. 如果 $\theta<T$, 通过变换 $t\to t-\theta$, 不妨认为 $\theta=0$. 令

$$M=\max\left\{\|u\|_{L^\infty((0,T),H^1)},\ \|v\|_{L^\infty((0,T),H^1)}\right\},$$

并取 (p,q) 是一个容许对. 则有

$$u-v=\mathrm{i}(\mathcal{K}(u)-\mathcal{K}(v))+\mathrm{i}(\mathcal{H}(u)-\mathcal{H}(v)).$$

利用 (8.39) 式和 (8.40) 式知, 对所有 $t\in(0,T]$, 有

$$\|u-v\|_{L_t^{p,q}}\leqslant C(M,p)\left[t\|u-v\|_{L_t^{\infty,2}}+t^{1-2/\sigma}\|u-v\|_{L_t^{\sigma,\beta}}\right].$$

依次取 $(p,q)=(\infty,2)$ 和 $(p,q)=(\sigma,\beta)$, 然后把所得的两个估计相加, 再取 t 适当小, 就可以得到

$$\|u-v\|_{L_t^{\infty,2}}+\|u-v\|_{L_t^{\sigma,\beta}}=0.$$

这与 $\theta=0$ 的假设矛盾. 证毕.

引理 8.4.8 对任意给定的 $M>0$, 存在 $T_M>0$, 使得对任意满足 $\|u_0\|_{H^1}\leqslant M$ 的 $u_0\in H^1$, 问题 (8.9) 存在解 $u\in L^\infty((0,T_M),H^1)\cap W^{1,\infty}((0,T_M),H^{-1})$, 并且成立

(i) $\|u\|_{L^\infty((0,T_M),H^1)} \leqslant 2M$;

(ii) $\|u(t)\|_2 = \|u_0\|_2$, $\forall\, t \in [0, T_M]$;

(iii) $E(u(t)) \leqslant E(u_0)$ 在 $[0, T_M]$ 上成立；

(iv) 如果 u 和 v 分别是问题 (8.9) 对应于初值 u_0 和 v_0 的解，并且 $\|u_0\|_{H^1}$, $\|v_0\|_{H^1} \leqslant M$. 则存在不依赖于 M 的正常数 K, 使得

$$\|u - v\|_{L^{\infty,2}_{T_M}} \leqslant K\|u_0 - v_0\|_2.$$

证明 分四步来证明. 假定 $M > 0$, $u_0 \in H^1$, 并且满足 $\|u_0\|_{H^1} \leqslant M$.

第一步 构造逼近解. 对于 $m \in \mathbb{N}$, 函数 g_m 是整体 Lipschitz 连续的. 根据定理 8.2.1, 问题

$$u_m(t) = Q(t)u_0 + \mathrm{i}\mathcal{G}_m(u_m)(t), \qquad t \geqslant 0 \tag{8.43}$$

存在唯一解 $u_m \in C([0,\infty), H^1) \cap C^1([0,\infty), H^{-1})$, 并且成立

$$\|u_m(t)\|_2 = \|u_0\|_2, \qquad \forall\, t \geqslant 0, \tag{8.44}$$

$$E_m(u_m(t)) = E_m(u_0), \qquad \forall\, t \geqslant 0. \tag{8.45}$$

第二步 逼近解 u_m 的先验估计. 令

$$\tau_m = \sup\left\{t \geqslant 0 : \|u_m\|_{C([0,t],H^1)} \leqslant 2M\right\}.$$

欲证明，存在仅依赖于 M 的正常数 T_M, 使得 $\tau_m \geqslant T_M$ 对所有 $m \in \mathbb{N}$ 成立. 不妨假设 $\tau_m < \infty$. 从而

$$\|u_m(\tau_m)\|_{H^1} = 2M. \tag{8.46}$$

由 (8.44) 式和 (8.45) 式得

$$\|u_m(t)\|_{H^1}^2 = \|u_0\|_{H^1}^2 - 2[V_m(u_m(t)) - V_m(u_0)]. \tag{8.47}$$

另一方面，因为 u_m 满足

$$\mathrm{i}(u_m)_t + \Delta u_m + g_m(u_m) = 0,$$

所以，利用 (8.4) 式，(8.32) 式和 (8.33) 式，以及 Sobolev 嵌入定理知，对所有 $t \in [0, \tau_m]$, 成立

$$\begin{aligned}
\|u_m'\|_{L^\infty((0,t),\,H^{-1})} &\leqslant \|\Delta u_m\|_{L^\infty((0,t),\,H^{-1})} + \|k(u_m)\|_{L^\infty((0,t),\,H^{-1})} \\
&\quad + \|h_m(u_m)\|_{L^\infty((0,t),\,H^{-1})} \\
&\leqslant \|u_m\|_{L^\infty((0,t),\,H^1)} + C_1\|k(u_m)\|_{L_t^{\infty,2}} + C_2\|h_m(u_m)\|_{L_t^{\infty,\beta'}} \\
&\leqslant 2M + 2MC(M) + 2MC_3C(M).
\end{aligned}$$

应用上述估计式和引理 8.4.5, 从 (8.36) 式就推出, 存在仅依赖于 M 的正常数 $D(M)$, 使得

$$2|V_m(u_m(t))-V_m(u_0)|\leqslant D(M)\big(t^{1/2}+t^{1/2-1/\sigma}\big),\qquad \forall\, t\in[0,\tau_m].$$

将其代入 (8.47) 式并利用 (8.46) 式，得

$$4M^2\leqslant M^2+D(M)\big(\tau_m^{1/2}+\tau_m^{1/2-1/\sigma}\big).$$

因为 $\sigma>2$, 故存在仅依赖于 M 的正常数 T_M, 使得 $\tau_m\geqslant T_M$ 对所有 $m\in\mathbb{N}$ 成立. 显然

$$\sup\big\{\|u_m(t)\|_{H^1}:t\in[0,T_M]\big\}\leqslant 2M. \tag{8.48}$$

第三步　序列 $\{u_m\}$ 的收敛性. 设 $m,k\in\mathbb{N}$. 对于 $t\geqslant 0$, 有

$$\begin{aligned}u_m(t)-u_k(t)=&\,\mathrm{i}[\mathcal{K}(u_m)(t)-\mathcal{K}(u_k)(t)]+\mathrm{i}[\mathcal{H}_m(u_m)(t)-\mathcal{H}_m(u_k)(t)]\\&+\mathrm{i}[\mathcal{H}_m(u_k)(t)-\mathcal{H}_k(u_k)(t)].\end{aligned}$$

依次对 $(p,q)=(\infty,2)$ 和 $(p,q)=(\sigma,\beta)$ 运用引理 8.4.4 推知，存在仅依赖于 M 的正常数 $C(M)$, 使得

$$\begin{aligned}&\|u_m-u_k\|_{L^{\infty,2}_{T_M}}+\|u_m-u_k\|_{L^{\sigma,\beta}_{T_M}}\\&\leqslant C(M)(1+T_M)(m^{-\nu}+k^{-\nu})\\&\quad+C(M)(T_M+T_M^{1-2/\sigma})\Big(\|u_m-u_k\|_{L^{\infty,2}_{T_M}}+\|u_m-u_k\|_{L^{\sigma,\beta}_{T_M}}\Big).\end{aligned} \tag{8.49}$$

适当改变 T_M 的值 (也仅依赖于 M), 使得

$$C(M)(T_M+T_M^{1-2/\sigma})\leqslant\frac{1}{2}.$$

由此估计式和不等式 (8.49) 知，$\{u_m\}$ 是 $L^\infty((0,T_M),L^2)\cap L^\sigma((0,T_M),L^\beta)$ 中的 Cauchy 列. 故存在 $u\in C([0,T_M],L^2)\cap L^\sigma((0,T_M),L^\beta)$, 使得在空间 $C([0,T_M],L^2)\cap L^\sigma((0,T_M),L^\beta)$ 中，有

$$u_m\longrightarrow u. \tag{8.50}$$

进一步，利用 (8.48) 式和命题 1.2.14 又推知，$u\in L^\infty((0,T_M);H^1)$ 并且结论 (i) 成立. 根据引理 8.4.4, 可以在方程 (8.43) 中令 $m\to\infty$, 进而推出，在 $[0,T_M]$ 上 u 是方程 (8.9) 的解. 守恒式 (ii) 是 (8.44) 式和 (8.50) 式的直接推论.

注意到 (8.50) 式，由引理 8.4.3 知，当 $m \to \infty$ 时，有

$$V_m(u_m(t)) \longrightarrow V(u(t)), \qquad \forall\, t \in [0, T_M]. \tag{8.51}$$

任取 $t \in [0, T_M]$. 因为在 H^1 中 $u_m(t) \rightharpoonup u(t)$, 所以

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(t)|^2 \mathrm{d}x \leqslant \liminf_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_m(t)|^2 \mathrm{d}x. \tag{8.52}$$

从而由 (8.45) 式，(8.51) 式和 (8.52) 式就推出结论 (iii).

第四步　解关于初值的连续依赖性. 设 u_0, v_0 满足 $\|u_0\|_{H^1} \leqslant M$, $\|v_0\|_{H^1} \leqslant M$, u 和 v 分别是问题 (8.9) 以 u_0 和 v_0 为初值的解. 我们有

$$u - v = Q(\cdot)(u_0 - v_0) + \mathrm{i}(\mathcal{K}(u) - \mathcal{K}(v)) + \mathrm{i}(\mathcal{H}(u) - \mathcal{H}(v)), \qquad t \in [0, T_M].$$

依次取 $(p,q) = (\infty, 2)$ 和 $(p,q) = (\sigma, \beta)$, 利用定理 8.3.3 估计上式右端的第一项，利用引理 8.4.4 估计上式右端的后两项. 这样就推出，存在正常数 K 和仅依赖于 M 的正常数 $C(M)$, 使得

$$\begin{aligned}&\|u-v\|_{L^{\infty,2}_{T_M}} + \|u-v\|_{L^{\sigma,\beta}_{T_M}}\\ \leqslant\ & K\|u_0 - v_0\|_2 + C(M)\big(T_M + T_M^{1-2/\sigma}\big)\left(\|u-v\|_{L^{\infty,2}_{T_M}} + \|u-v\|_{L^{\sigma,\beta}_{T_M}}\right).\end{aligned}$$

取 T_M 适当小 (仅依赖于 M), 使得

$$C(M)\big(T_M + T_M^{1-2/\sigma}\big) \leqslant \frac{1}{2},$$

那么结论 (iv) 成立.

注 8.4.1　在引理 8.4.8 中，如果初值 $u_0 \in H^2$, 那么 $u \in C([0,T_M], H^2) \cap C^1([0,T_M], L^2)$.

该注的证明可以参见文献 [5] 的第 7 章.

引理 8.4.9　设 $T > 0$, $u_0 \in H^1$. 如果 $u \in L^\infty((0,T), H^1)$ 是问题 (8.9) 的解，那么 $u \in C([0,T], H^1) \cap C^1([0,T], H^{-1})$, 并且成立

(i) $\|u(t)\|_2 = \|u_0\|_2$, $\forall\, t \in [0,T]$;

(ii) $E(u(t)) = E(u_0)$, $\forall\, t \in [0,T]$.

证明　第一步　证明守恒式 (i)和(ii). 首先，u: $[0,T] \to H^1$ 是弱连续的. 取 $M = \|u\|_{L^\infty((0,T),H^1)}$ 及

$$\theta = \sup\{t \in [0,T]\colon 在\ [0,t]\ 上\ (\mathrm{i})\ 和\ (\mathrm{ii})\ 都成立\}.$$

下证 $\theta = T$. 假设 $\theta < T$, 利用变换 $t \to t - \theta$, 不妨认为 $\theta = 0$. 于是存在 $\delta \in (0, T_M)$, 使得

$$\big|\|u(\delta)\|_2 - \|u_0\|_2\big| + |E(u(\delta)) - E(u_0)| > 0, \tag{8.53}$$

这里的 T_M 由引理 8.4.8 给出. 设 v 是由引理 8.4.8 所确定的问题 (8.8) 以 u_0 为初值的解. 因为 $\delta \in (0, T_M)$, 所以利用引理 8.4.7 知, 在 $[0, \delta]$ 上, $u = v$. 根据引理 8.4.8 的结论 (ii) 和 (iii), 又得到 $\|u(\delta)\|_2 = \|u_0\|_2$, $E(u(\delta)) \leqslant E(u_0)$. 因此, 不等式 (8.53) 等价于

$$E(u(\delta)) < E(u_0). \tag{8.54}$$

定义 $w(t) = \overline{u(\delta - t)}$, $t \in [0, \delta]$. 因为 u 满足方程 (8.10), 所以 w 满足

$$\mathrm{i}w_t + \Delta w + g(w) = 0, \qquad \text{a.e. } t \in [0, T].$$

根据定理 8.1.6, 在 $[0, \delta]$ 上 w 满足相应的 (8.9) 式 (用 $w(0)$ 代替 u_0). 又因为 $\|w(0)\|_{H^1} = \|u(\delta)\|_{H^1} \leqslant M$, 所以由引理 8.4.7 知, 在 $[0, \delta]$ 上 w 与由引理 8.4.8 所给出的问题 (8.9) 的解相同 (以 $w(0)$ 为初值). 因此, $E(w(\delta)) \leqslant E(w(0))$ (引理 8.4.8 的结论 (iii)), 即 $E(u_0) \leqslant E(u(\delta))$. 这与 (8.54) 式矛盾. 故结论 (i) 和 (ii) 成立.

第二步 证明解的正则性. 由于 u: $[0, T] \to H^1$ 弱连续, 结论 (i) 说明, u: $[0, T] \to L^2$ 连续. 从而由 (8.36) 式知, $V(u)$: $[0, T] \to \mathbb{R}$ 也连续. 利用结论 (ii) 又推知, $\|u\|_{H^1}$: $[0, T] \to \mathbb{R}$ 连续. 于是 $u \in C([0, T], H^1)$. 再由定理 8.1.5 知, u 满足问题 (8.6)~(8.8). 因此 $u \in C([0, T], H^1) \cap C^1([0, T], H^{-1})$.

注 8.4.2 在引理 8.4.9 中, 如果初值 $u_0 \in H^2$, 那么 $u \in C([0, T], H^2) \cap C^1([0, T], L^2)$.

该注的证明可以参见文献 [5] 的第 7 章.

最后完成定理 8.4.1 的证明. 利用引理 8.4.7 和引理 8.4.8, 同于定理 4.2.5 和定理 4.2.8 的证明可推知, 存在满足性质 (i) 的唯一极大定义解 $u \in C([0, \tau_0), H^1)$. 性质 (ii) 和 (iii) 可由引理 8.4.9 直接得到. 下面证明解关于初值的连续依赖性. 假设 $u_0, u_{0n} \in H^1$, 且在 H^1 中 $u_{0n} \to u_0$. 又设 u 和 u_n 分别是问题 (8.9) 以 u_0 和 u_{0n} 为初值的极大定义解. 下面只需证明: 对任意的 $T \in (0, \tau_0)$, 当 n 适当大时, $\tau_n := \tau(u_{0n}) > T$, 并且在 $C([0, T], H^1)$ 中 $u_n \to u$. 事实上, 记

$$M = 4\|u\|_{L^\infty((0,T),H^1)},$$

$$\theta(n) = \sup\big\{t \in [0, \tau_n) : t \leqslant T,\ \|u_n\|_{L^\infty((0,t),H^1)} \leqslant M\big\}.$$

取 $k \in \mathbb{N}$ 及 $\delta > 0$, 使得 $\delta \leqslant T_M$, $k\delta = T$, 其中 T_M 由引理 8.4.8 确定. 因为 $\theta(n) \leqslant T$, 所以利用引理 8.4.8 的结论 (iv), 容易推出

$$\|u - u_n\|_{L^{\infty,2}_{\theta(n)}} \leqslant K^k \|u_0 - u_{0n}\|_2. \tag{8.55}$$

现在证明：当 n 充分大时， $\theta(n) = T$. 由于当 $n \gg 1$ 时， $\|u_{0n}\|_{H^1} \leqslant M/2$, 因此利用引理 8.4.8 的结论 (i) 推知， $\|u_n\|_{L^\infty((0,T_{M/2}),H^1)} \leqslant M$. 从而当 $n \gg 1$ 时, $\theta(n) \geqslant T_{M/2} \geqslant T_M$. 不失一般性，假设 $\lim\limits_{n\to\infty} \theta(n) = \theta \in [T_M, T]$. 任意固定 $t \in (0, \theta)$. 那么当 n 适当大时 $u_n(t)$ 有定义. 由 (8.55) 式知，在 L^2 中， $u_n(t) \to u(t)$. 另一方面，有

$$E(u_n(t)) = E(u_{0n}) \longrightarrow E(u_0) = E(u(t)).$$

同于引理 8.4.9 的第二步的证明可以推出，在 H^1 中 $u_n(t) \to u(t)$. 特别地，当 $n \gg 1$ 时 $\|u_n(t)\|_{H^1} \leqslant M/2$. 再利用引理 8.4.8 的结论 (i) 又得到 $\theta(n) \geqslant \min\{T, t + T_{M/2}\}$. 由 $t < \theta$ 的任意性知，当 $n \gg 1$ 时 $\theta(n) = T$. 因为 τ_n 是 u_n 的最大存在时间，所以 $\tau_n > T$, $\forall\, n \gg 1$.

接下来证明，在 $C([0,T], H^1)$ 中， $u_n \to u$. 采用反证法. 假设存在 $t_n \in [0,T]$ 和 $\varepsilon > 0$, 使得 $\|u_n(t_n) - u(t_n)\|_{H^1} \geqslant \varepsilon$. 不妨认为 $t_n \to t \in [0,T]$. 于是

$$\|u_n(t_n) - u(t)\|_{H^1} \geqslant \varepsilon/2, \qquad n \gg 1. \tag{8.56}$$

由于 $u \in C([0,T], L^2)$, 因此根据 (8.55) 式知，在 L^2 中， $u_n(t_n) \to u(t)$. 进一步，还有

$$E(u_n(t_n)) = E(u_{0n}) \longrightarrow E(u_0) = E(u(t)).$$

同于引理 8.4.9 的第二步的证明可以推出，在 H^1 中 $u_n(t_n) \to u(t)$. 这与 (8.56) 式矛盾. 从而定理 8.4.1 得证.

§8.5 非线性 Schrödinger 方程的初值问题：整体存在性

假设 $\Omega = \mathbb{R}^N$, 函数 g 满足 8.4 节的条件. 同于前面的热方程和波动方程，我们将建立两类关于解的整体存在性结果. 一类是对函数 g 不附加其他条件，证明当初值很小时，解整体存在；另一类是对函数 g 的增长阶附加一定的条件，证明所有解都整体存在.

定理 8.5.1 存在正常数 δ 和 K, 使得当 $\|u_0\|_{H^1} \leqslant \delta$ 时，有

$$\tau_0 = \infty, \quad \text{并且} \ \sup_{t\geqslant 0} \|u(t)\|_{H^1} \leqslant K \|u_0\|_{H^1}.$$

证明 首先，我们有

$$G(z) \leqslant A|z|^2 + B|z|^{2+\alpha}, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

不妨假设 $\alpha > 0$. 于是

$$2|V(w)| \leqslant C\|w\|_2^2 + D\|w\|_{H^1}^{2+\alpha}, \qquad \forall\, w \in H^1. \tag{8.57}$$

设 $u_0 \in H^1$, u 是问题 (8.9) 以 u_0 为初值的解. 记

$$f(t) = \|u(t)\|_{H^1}^2, \qquad t \in [0, \tau_0).$$

根据定理 8.4.1 的守恒式 (ii) 和 (iii), 我们有

$$f(t) \leqslant f(0) + 2|V(u_0)| + 2|V(u(t))|, \qquad \forall\, t \in [0, \tau_0).$$

记 $\varepsilon = \alpha/2$. 利用不等式 (8.57) 以及 L^2 范数的守恒律，从上式推出

$$f(t) \leqslant f(0) + 2Cf(0) + Df^{1+\varepsilon}(0) + Df^{1+\varepsilon}(t), \qquad \forall\, t \in [0, \tau_0).$$

因此，当 $f(0) \leqslant 1$ 时，就有

$$f(t) \leqslant Mf(0) + Df^{1+\varepsilon}(t), \qquad \forall\, t \in [0, \tau_0),$$

这里的 $M = 1 + 2C + D$. 余下的证明同于定理 5.2.16 的证明中的最后部分.

定理 8.5.2 假设存在 $0 \leqslant \tau < 4/N$ 和正常数 A, B, 使得

$$G(z) \leqslant A|z|^2 + B|z|^{2+\tau}, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

那么，对任何 $u_0 \in H^1$, 有 $\tau_0 = \infty$, 并且 $\sup\limits_{t \geqslant 0} \|u(t)\|_{H^1} < \infty$.

证明 首先，对任意 $w \in H^1$, 有

$$|V(w)| \leqslant A\int_{\mathbb{R}^N} |w|^2 \mathrm{d}x + B\int_{\mathbb{R}^N} |w|^{2+\tau} \mathrm{d}x.$$

利用内插不等式 (定理 1.1.4) 推出

$$|V(w)| \leqslant A\int_{\mathbb{R}^N} |w|^2 \mathrm{d}x + C\left(\int_{\mathbb{R}^N} |w|^2 \mathrm{d}x\right)^{1+\frac{\tau}{2}-\frac{N\tau}{4}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{N\tau}{4}} \tag{8.58}$$

设 $u_0 \in H^1$, u 是问题 (8.9) 以 u_0 为初值的解. 记

$$f(t) = \|\nabla u(t)\|_2^2, \qquad t \in [0, \tau_0).$$

由能量守恒律得

$$f(t) \leqslant 2E(u_0) + 2|V(u(t))|, \qquad \forall\, t \in [0, \tau_0).$$

利用不等式 (8.58) 以及 L^2 范数的守恒律，又得到

$$f(t) \leqslant CE(u_0) + C(u_0) f^{\frac{N\tau}{4}}(t), \qquad \forall\, t \in [0, \tau_0). \tag{8.59}$$

因为 $N\tau < 4$, 故结论成立.

注 8.5.1 当 $\tau = 4/N$ 时，不等式 (8.59) 成为

$$f(t) \leqslant CE(u_0) + C\|u_0\|_2^{4/N} f(t), \qquad \forall\, t \in [0, \tau_0).$$

所以当 $\|u_0\|_2 \ll 1$ 时， $\tau_0 = \infty$.

§8.6 非线性 Schrödinger 方程的初值问题：有限时刻爆破

非线性 Schrödinger 方程的爆破结果基于下面的命题.

命题 8.6.1 假设 $u_0 \in H^1$, $u \in C([0, \tau_0), H^1)$ 是问题 (8.9) 的解. 如果 $|\cdot| u_0(\cdot) \in L^2$, 那么 $|\cdot| u(t, \cdot) \in C([0, \tau_0), L^2)$, 函数 $\||\cdot| u(t, \cdot)\|_2^2 \in C^2([0, \tau_0))$, 并且对任意 $t \in [0, \tau_0)$, 还有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 |u(t,x)|^2 \mathrm{d}x = -4\langle \mathrm{i}x \cdot \nabla u, u\rangle = 4 \operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}^N} \bar{u} x \cdot \nabla u \mathrm{d}x, \tag{8.60}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 |u(t,x)|^2 \mathrm{d}x = 16E(u(t)) - 4N \int_{\mathbb{R}^N} g(|u(t,x)|) |u(t,x)| \mathrm{d}x \\ +8(2+N) \int_{\mathbb{R}^N} G(u(t,x)) \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{8.61}$$

为证命题 8.6.1, 我们需要下面的两个引理.

引理 8.6.2 假设 $u_0 \in H^1$, $u \in C([0, \tau_0), H^1)$ 是问题 (8.9) 的解. 如果 $|\cdot| u_0(\cdot) \in L^2$, 那么 $|\cdot| u(t, \cdot) \in C([0, \tau_0), L^2)$, 函数 $\||\cdot| u(t, \cdot)\|_2^2 \in C^1([0, \tau_0))$, 并且等式 (8.60) 成立.

证明 对于 $0 < \varepsilon \leqslant 1$, 如下定义函数 θ_ε 和 ρ_ε：

$$\theta_\varepsilon(r) = r\mathrm{e}^{-\varepsilon r^2/2}, \qquad \rho_\varepsilon(r) = r^2 \mathrm{e}^{-\varepsilon r^2},$$

其中 $r = |x|$. 令

$$f_\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}^N} |\theta_\varepsilon u|^2 \mathrm{d}x, \qquad t \in [0, \tau_0).$$

显然， $f_\varepsilon\in C^1([0,\tau_0))$, 并且对所有 $t\in[0,\tau_0)$, 成立

$$\begin{aligned}f_\varepsilon'(t)&=2\langle\theta_\varepsilon u,\,\theta_\varepsilon u_t\rangle_{H^1,H^{-1}}=2\langle\rho_\varepsilon u,\,u_t\rangle_{H^1,H^{-1}}=2\langle\rho_\varepsilon u,\,\mathrm{i}\Delta u+\mathrm{i}g(u)\rangle_{H^1,H^{-1}}\\&=2\langle\rho_\varepsilon u,\,\mathrm{i}\Delta u\rangle_{H^1,H^{-1}}=-2\langle\rho_\varepsilon\nabla u,\,\mathrm{i}\nabla u\rangle-2\langle u\nabla\rho_\varepsilon,\,\mathrm{i}\nabla u\rangle\\&=-2\langle u\nabla\rho_\varepsilon,\,\mathrm{i}\nabla u\rangle=-2\Big\langle u\rho_\varepsilon'\frac{x}{r},\,\mathrm{i}\nabla u\Big\rangle.\end{aligned}\tag{8.62}$$

易验证，存在与 ε 无关的正常数 C, 使得 $|\rho_\varepsilon'(r)|\leqslant C\theta_\varepsilon(r)$, 从而有

$$f_\varepsilon'(t)\leqslant 2C\|u(t)\|_{H^1}f_\varepsilon^{1/2}(t).$$

由此推出，对于任何 $T<\tau_0$, $f_\varepsilon(t)$ 在 $[0,T]$ 上一致有界. 因为 $f_\varepsilon(t)$ 关于 ε 单调并且当 $\varepsilon\to0^+$ 时，有

$$f_\varepsilon(t)\longrightarrow\int_{\mathbb{R}^N}|x|^2|u(t,x)|^2\mathrm{d}x,$$

所以利用单调收敛定理知

$$\int_{\mathbb{R}^N}|x|^2|u(t,x)|^2\mathrm{d}x<\infty,\qquad\forall\,t\in[0,\tau_0),$$

并且对任意的 $T<\tau_0$, 在 $[0,T]$ 上 $\||\cdot|u(t,\cdot)\|_2$ 有界. 从 0 到 $t\in[0,\tau_0)$ 积分 (8.62) 式，我们有

$$f_\varepsilon(t)=f_\varepsilon(0)-4\int_0^t\Big\langle(1-\varepsilon r^2)\mathrm{e}^{-\varepsilon r^2}ru,\,\mathrm{i}\frac{x}{r}\cdot\nabla u\Big\rangle\mathrm{d}t,\qquad\forall\,t\in[0,\tau_0).$$

令 $\varepsilon\searrow0$, 得

$$\int_{\mathbb{R}^N}|x|^2|u(t,x)|^2\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^N}|x|^2|u_0(x)|^2\mathrm{d}x-4\int_0^t\langle u,\,\mathrm{i}x\cdot\nabla u\rangle\mathrm{d}t,\qquad\forall\,t\in[0,\tau_0).$$

由此知，函数 $\||\cdot|u(t,\cdot)\|_2$ 在 $[0,\tau_0)$ 上连续，函数 $\||\cdot|u(t,\cdot)\|_2^2$ 在 $[0,\tau_0)$ 上连续可微，并且等式 (8.60) 成立. 引理得证.

引理 8.6.3 假设 $u_0\in H^2$, $u\in C([0,\tau_0),H^2)$ 是问题 (8.9) 的解. 如果 $|\cdot|u_0(\cdot)\in L^2$, 那么 $|\cdot|u(t,\cdot)\in C([0,\tau_0),L^2)$, 函数 $\||\cdot|u(t,\cdot)\|_2^2\in C^2([0,\tau_0))$, 并且等式 (8.61) 成立.

证明 分三步来证明. 为了书写方便, 在以下的证明中, 我们用 u_r 表示 $\frac{x}{r}\cdot\nabla u$, 其中 $r=|x|$.

第一步 设 $\theta\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ 是径向对称的实值函数. 对于 $T>0$ 及 $u\in C([0,T],H^1)\cap C^1([0,T],L^2)$, 令 $h(t)=\langle r\theta u,\,\mathrm{i}u_r\rangle$, $t\in[0,T]$. 欲证 $h\in C^1([0,T])$, 并且成立

$$h'(t)=\langle u_t,\,\mathrm{i}(2r\theta u_r+(N\theta+r\theta')u)\rangle,\qquad\forall\,t\in[0,T].\tag{8.63}$$

事实上，当 $u \in C^1([0,\tau_0),H^1)$ 时，显然有 $h \in C^1([0,T])$, 并且成立

$$h'(t) = \langle r\theta u_t,\, \mathrm{i}u_r\rangle + \langle r\theta u,\, \mathrm{i}u_{tr}\rangle = \langle u_t,\, \mathrm{i}r\theta u_r\rangle + \langle \theta u,\, \mathrm{i}x\cdot\nabla u_t\rangle, \qquad \forall\, t \in [0,T]. \quad (8.64)$$

注意到

$$\langle \theta u,\, \mathrm{i}x\cdot\nabla u_t\rangle = \mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}^N} \theta u x\cdot\nabla\bar{u}_t \mathrm{d}x,$$
$$\theta u x\cdot\nabla\bar{u}_t = \nabla\cdot(x\theta u\bar{u}_t) - N\theta u\bar{u}_t - \theta\bar{u}_t\, x\cdot\nabla u - r\theta' u\bar{u}_t,$$

我们有

$$\langle \theta u,\, \mathrm{i}x\cdot\nabla u_t\rangle = \langle u_t,\, \mathrm{i}(\theta x\cdot\nabla u + (N\theta + r\theta')u)\rangle = \langle u_t,\, \mathrm{i}(r\theta u_r + (N\theta + r\theta')u)\rangle, \qquad \forall\, t \in [0,T]$$

将其代入 (8.64) 式就推出 (8.63) 式．再由 (8.63) 式知

$$h(t) = h(0) + \int_0^t \langle u_t,\, \mathrm{i}(2r\theta u_r + (N\theta + r\theta')u)\rangle \mathrm{d}t, \qquad \forall\, t \in [0,T]. \quad (8.65)$$

利用稠密性推出，当 $u \in C([0,T],H^1)\cap C^1([0,T],L^2)$ 时，(8.65) 式仍然成立．从而 $h \in C^1([0,T])$ 并且 (8.63) 式成立．

当然, 对于引理中的 u 而言, 函数 $h(t) = \langle r\theta u,\, \mathrm{i}u_r\rangle$ 属于 $C^1([0,\tau_0))$, 并且 (8.63) 式成立．故有

$$h'(t) = \langle \Delta u + g(u),\, 2r\theta u_r + (N\theta + r\theta')u\rangle, \qquad \forall\, t \in [0,\tau_0). \quad (8.66)$$

第二步　证明对于 $u \in H^2$, 下面的关系式成立：

$$\begin{aligned}
&\langle \Delta u + g(u),\, 2r\theta u_r + (N\theta + r\theta')u\rangle \\
&= -2\int_{\mathbb{R}^N} \theta|\nabla u|^2 \mathrm{d}x + N\int_{\mathbb{R}^N} \theta[g(|u|)|u| - 2G(u)]\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} r\theta'(g(|u|)|u| - 2G(u) - 2|u_r|^2)\mathrm{d}x - \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^N} [(1+N)\theta' + r\theta'']u_r\bar{u}\mathrm{d}x. \quad (8.67)
\end{aligned}$$

利用稠密性，我们只需考虑 $u \in \mathcal{D}$ 的情形．此时

$$\langle g(u),\, (N\theta + r\theta')u\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (N\theta + r\theta')g(|u|)|u|\mathrm{d}x, \quad (8.68)$$

$$\langle g(u),\, 2r\theta u_r\rangle = \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^N} 2r\theta g(u)\bar{u}_r \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} 2r\theta G(u)_r \mathrm{d}x.$$

因为

$$2r\theta G(u)_r = 2\theta x\cdot\nabla G(u) = \nabla\cdot(2x\theta G(u)) - 2(N\theta + r\theta')G(u),$$

所以

$$\langle g(u),\, 2r\theta u_r\rangle = -2\int_{\mathbb{R}^N}(N\theta + r\theta')G(u)\mathrm{d}x. \tag{8.69}$$

另一方面，直接计算知

$$\langle \Delta u,\, (N\theta+r\theta')u\rangle = -\int_{\mathbb{R}^N}(N\theta+r\theta')|\nabla u|^2\mathrm{d}x - \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^N}[(1+N)\theta'+r\theta'']u_r\bar{u}\mathrm{d}x, \tag{8.70}$$

$$\langle \Delta u,\, 2r\theta u_r\rangle = -\langle 2\theta\nabla u,\, \nabla(ru_r)\rangle - 2\int_{\mathbb{R}^N} r\theta'|u_r|^2\mathrm{d}x. \tag{8.71}$$

注意到下面的等式:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(2\theta\nabla u\cdot\nabla(r\bar{u}_r)) &= \mathrm{Re}(2\theta\nabla u\cdot\nabla(x\cdot\nabla\bar{u}))\\ &= [(2-N)\theta - r\theta']|\nabla u|^2 + \nabla\cdot(x\theta|\nabla u|^2),\end{aligned}$$

从 (8.71) 式推出

$$\langle \Delta u,\, 2r\theta u_r\rangle = \int_{\mathbb{R}^N}[(N-2)\theta + r\theta']|\nabla u|^2\mathrm{d}x - 2\int_{\mathbb{R}^N} r\theta'|u_r|^2\mathrm{d}x. \tag{8.72}$$

应用 (8.68)~(8.70) 式和 (8.72) 式，就可以得到 (8.67) 式.

对于引理中的函数 u 而言， (8.67) 式当然成立. 利用 (8.66) 式和 (8.67) 式得

$$\begin{aligned}h'(t) = &-2\int_{\mathbb{R}^N}\theta|\nabla u|^2\mathrm{d}x + N\int_{\mathbb{R}^N}\theta[g(|u|)|u| - 2G(u)]\mathrm{d}x\\ &+\int_{\mathbb{R}^N} r\theta'(g(|u|)|u| - 2G(u) - 2|u_r|^2)\mathrm{d}x\\ &-\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^N}[(1+N)\theta' + r\theta'']u_r\bar{u}\mathrm{d}x,\quad \forall\, t\in[0,\tau_0).\end{aligned} \tag{8.73}$$

第三步 取 $\theta_\varepsilon = \mathrm{e}^{-\varepsilon r^2}$, $0<\varepsilon\leqslant 1$. 那么 $|\theta_\varepsilon|\leqslant 1$, $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\theta_\varepsilon = 1$. 易证， $|r\theta_\varepsilon'|\leqslant C$, $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0} r\theta_\varepsilon' = 0$, 并且

$$|(1+N)\theta_\varepsilon' + r\theta_\varepsilon''|\leqslant C,\qquad \lim_{\varepsilon\searrow 0}|(1+N)\theta_\varepsilon' + r\theta_\varepsilon''| = 0.$$

用 θ_ε 代替 (8.73) 式中的 θ, 并记其右端为 $f_\varepsilon(t)$. 则有

$$\langle r\theta_\varepsilon u,\, \mathrm{i}u_r\rangle = \langle r\theta_\varepsilon u_0,\, \mathrm{i}u_{0r}\rangle + \int_0^t f_\varepsilon(s)\mathrm{d}s. \tag{8.74}$$

此外，对任意的 $T<\tau_0$, 函数 f_ε 在 $[0,T]$ 上有界，并且满足

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} f_\varepsilon(t) = -2\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x + N\int_{\mathbb{R}^N}[g(|u|)|u| - 2G(u)]\mathrm{d}x. \tag{8.75}$$

由能量守恒关系知

$$
\begin{aligned}
&-2\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+N\int_{\mathbb{R}^N}[g(|u|)|u|-2G(u)]\mathrm{d}x\\
&=-4E(u(t))+N\int_{\mathbb{R}^N}g(|u|)|u|\mathrm{d}x-(2N+4)\int_{\mathbb{R}^N}G(u)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

在 (8.74) 式中令 $\varepsilon\searrow 0$, 并利用上式和 (8.75) 式得

$$
\langle ru,\,\mathrm{i}u_r\rangle=\langle ru_0,\,\mathrm{i}u_{0r}\rangle-\int_0^t\left(4E(u(t))-N\int_{\mathbb{R}^N}g(|u|)|u|\mathrm{d}x+(2N+4)\int_{\mathbb{R}^N}G(u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s. \tag{8.76}
$$

从 (8.60) 式和 (8.76) 式就可以推出 (8.61) 式. 引理得证.

命题 8.6.1 的证明 根据引理 8.6.2, 为了说明命题 8.6.1 的结论成立，只需证明函数 $\||\cdot|u(t,\cdot)\|_2^2\in C^2([0,\tau_0))$, 并且 (8.61) 式成立. 取 $T<\tau_0$, $u_{0n}\in H^2$, 使得在 H^1 中 $u_{0n}\to u_0$. 记 (8.9) 式对应于 u_{0n} 的解为 u_n, 其最大存在区间为 $[0,\tau_n)$. 由定理 8.4.1 知，当 $n\gg 1$ 时， $\tau_n>T$ 并且在 $C([0,T],H^1)$ 中 $u_n\to u$. 对于 $t\in[0,T]$ 和 u_n 而言， (8.76) 式成立. 在该式中令 $n\to\infty$, 就推出， u 也满足 (8.76) 式. 再由 (8.60) 式和 (8.76) 式就可以推出， u 满足 (8.61) 式.

定理 8.6.4 假设 g 满足 8.4 节的条件. 进一步假设

$$
sg(s)\geqslant\left(2+\frac{4}{N}\right)G(s),\qquad\forall\, s>0. \tag{8.77}
$$

如果 $u_0\in H^1$ 满足 $|\cdot|u_0(\cdot)\in L^2$, $E(u_0)<0$, 那么 $\tau_0<\infty$.

证明 令

$$
f(t)=\int_{\mathbb{R}^N}|x|^2|u(t,x)|^2\mathrm{d}x,\qquad t\in[0,\tau_0).
$$

从 (8.61) 式， (8.77) 式和能量守恒式推出

$$
f''(t)\leqslant 16E(u_0),\qquad t\in[0,\tau_0).
$$

由此得到

$$
f(t)\leqslant f(0)+tf'(0)+8t^2E(u_0),\qquad t\in[0,\tau_0).
$$

因为 $f(t)\geqslant 0$, $E(u_0)<0$, 故 $\tau_0<\infty$.

习 题 八

8.1 证明引理 8.1.1.

8.2 证明定理 8.1.6.

8.3 证明 (8.16) 式.

8.4 证明 (8.18) 式.

8.5 证明 (8.21) 式.

8.6 仿照定理 5.2.16, 把定理 8.5.1 的证明补充完整.

8.7 取函数 $g(s)=a|s|^\alpha s$, 其中 $\alpha>0$ 满足 $(N-2)\alpha<4$, $a\neq 0$. 初值 $u_0\in H^1$. 试对 a,α 的各种情况，讨论问题 (8.9) 的解 u 的整体存在性和有限时刻爆破.

8.8 假设初值 $u_0\in H^1$, 且满足 $|\cdot|u_0(\cdot)\in L^2$. 记 u 是问题 (8.9) 的解. 定义

$$f(t)=\int_{\mathbb{R}^N}|(x+2\mathrm{i}t\nabla)u(t,x)|^2\mathrm{d}x-8t^2\int_{\mathbb{R}^N}G(u(t,x))\mathrm{d}x,\qquad t\in[0,\tau_0).$$

试证明: $f\in C^1([0,\tau_0))$, 并且成立

$$f'(t)=4t\int_{\mathbb{R}^N}[Ng(|u|)|u|-2(N+2)G(u)]\mathrm{d}x,\qquad t\in[0,\tau_0).$$

8.9 在上题中，如果 $g(s)=\lambda s^{1+4/N}$. 试证明 $f(t)=f(0)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|x|^2|u_0(x)|^2\mathrm{d}x$.

8.10 设 $g(s)=a|s|^\alpha s$, 其中 $\alpha>0$ 满足 $(N-2)\alpha<4$, 初值 $u_0\in H^1$. 如果 $a<0$, 初值 u_0 满足 $|\cdot|u_0(\cdot)\in L^2$. 试证明：存在正常数 C, 使得问题 (8.9) 的解 u 满足

$$\|u(t)\|_{2+\alpha}\leqslant Ct^{-\frac{N\alpha}{2(2+\alpha)}},\qquad \forall\ t>0.$$

(提示：分 $\alpha\geqslant 4/N$ 和 $\alpha<4/N$ 两种情况分别讨论).

8.11 在习题 8.9 中，令

$$v(t,x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{|x|^2}{4t}}u(t,x),\qquad x\in\mathbb{R}^N,\ t\in[0,\tau_0).$$

试证明

$$f(t)=8t^2E(v(t))\geqslant 8t^2E(|u(t)|).$$

参 考 文 献

[1] R. A. Adams. *Sobolev Spaces.* New York: Academic Press, 1975

[2] S. Agmon. *Elliptic Boundary Value Problems.* Van Nostrand, 1965

[3] J. Bergh, J. Löfström. *Interpolation Spaces, An Introduction.* Springer-Verlag, 1976

[4] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Appliactions.* Paris: Masson, 1983

[5] T. Cazenave, A. Haraux. *An Introduction to Semilinear Evolution Equations* (translated by Y. Martel). Oxford: Clarendon Press, 1998

[6] N. Dinculeanu. *Vector Measures.* New York: Pergamon Press, 1967

[7] A. Friedman. *Partial Differential Equations of Parabolic Type.* Prentice-Hall, 1964

[8] D. Gilbarg, N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of the Second Order.* New York: Springer-Verlag, 1977

[9] D. Henry. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Mathematics.* vol.840, New York: Springer-Verlag, 1981

[10] M. Miklavčič. *Applied Functional Analysis and Partial Differential Equations.* Singapore: World Scientific, 1998

[11] M. Marcus, V. J. Mizel. *Every superposition operator mapping one Sobolev space into another is continuous.* J. Functional Analysis, 1979(33): 217～229

[12] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Application to Partial Differential Equations.* New York: Springer-Verlag, 1983

[13] K. Yosida. *Functional Analysis.* New York: Springer-Verlag,1965

[14] 李大潜，陈韵梅．非线性发展方程．北京：科学出版社，1989

[15] 叶其孝，李正元．反应扩散方程引论．北京：科学出版社，1999

[16] 王元明．非线性偏微分方程 (上册). 南京：东南大学出版社，1992